Explosion en temps fini dans des équations de type ondes avec coefficients variables

Projet de thèse

22 mai 2021

encadré par :

Hatem Zaag, CNRS et USPN

1 Introduction : équation des ondes et explosion

On parle d'explosion en temps fini dans une équation d'évolution, lorsque la solution initialement régulière cesse d'exister au bout d'un temps fini, et qu'en même temps la norme de la solution ou de certaines de ses dérivées tend vers l'infini.

Le sens précis de cette définition dépend grandement de l'Équation aux Dérivées Partielles (EDP) considérée, vu que la notion même de solution et l'espace où elle est définie en dépendent aussi.

Considérons donc cette EDP

$$\partial_t^2 u = \Delta u + |u|^{p-1}u, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x,0) = u_1(x), \tag{1}$$

avec $x \in \mathbb{R}^N$ et $t \geq 0$, qui est considérée comme le modèle le plus simple d'une EDP de type ondes présentant une explosion en temps fini.

Pour des données initiales $(u_0, u_1) \in H^1_{loc} \times L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, on sait par Alinhac [1] que la solution est soit définie pour tout $t \geq 0$, soit uniquement dans un domaine de définition

$$D = \{(x,t) \mid 0 \leq t < T(x)\},$$

pour une fonction 1-Lipschitzienne $x \mapsto T(x)$. C'est cette deuxième éventualité qui nous intéresse ici. On dit alors que la solution *"explose en temps fini"*. Le graphe $\{t = T(x)\}$ est alors appelé *"courbe d'explosion"*.

L'existence d'une telle solution peut se démontrer de deux manières différentes :

- soit grâce à des techniques d'Équations Différentielles Ordinaires (EDO), couplées à la vitesse de propagation finie pour l'EDP (1) ;
- soit grâce à des techniques de type énergie (voir Levine [3] and [4]).

Étant donnée une solution explosive, plusieurs questions naturelles se posent, dont la question du comportement asymptotique à l'explosion, et aussi la régularité de la courbe d'explosion.

En dimension 1, une réponse exhaustive à ces deux questions a été donnée par Merle et Zaag dans une série de travaux ([5], [7], [6], [8], [9], [11] et [12]).

En dimension supérieure, on dispose de résultats partiels, notamment dans le cas radial hors de l'origine (voir [10]), ou encore au voisinage de solutions bien particulières (voir [14] et [13]).

Malgré l'intérêt que peuvent avoir tous ces résultats, une crtique demeure : ils se rapportent tous à l'équation modèle (1), et ne donnent pas de réponses dans des modèles plus réalistes découlant de situations physiques concrètes.

Parmi ces modèles, on cite le cas d'EDP présentant des coefficients non constants, comme la suivante

$$\partial_t^2 u = a(x)\Delta u + b(x)|u|^{p-1}u. \tag{2}$$

Le cas $a(x)$ non constant correspond à une propagation d'ondes dans un milieu non homogène (voir Todorova, Radu et Yordanov [15]). Le cas intéressant est celui où $a(x)$ est singulier, valant 0 ou tendant vers l'infini en un point donné.

Dans [2], Azaiez et Zaag obtiennent des résultats partiels pour (2), dans le cas où

$$a(x) = |x|^\alpha,$$

pour une suite quantifiée α_n de valeurs de α, laissant ouverte la question pour les autres valeurs de α.

2 Projet de thèse : explosion en temps fini pour des EDP de type ondes avec coefficients variables

Comme évoqué dans l'introduction, le cas des équations de type ondes avec des coefficients variables est loin d'avoir été suffisamment exploré. Typiquement, le cas de l'équation (2) avec $a(x) = |x|^\alpha$ où $\alpha > -2$, reste à faire, en dehors de la suite α_n évoquée par Azaiez et Zaag dans [2]. Le fait que $a(x)$ présente une singularité en $x = 0$ confère à la question une importance certaine.

Justement, ca sera le premier objectif de la thèse. On tentera d'abord de s'intéresser au cas radial, qui sera plus accessible, car il sera voisin du cas de la dimension 1 pour l'équation modèle (1). Le cas de la dimension supérieure exigera certainement l'introduction de nouvelles idées. Dans les 2 cas, on s'attachera à la description du comportement à l'explosion de la solution, avec la détermination du *"profil à l'explosion"*. La définition et la régularité de la courbe d'explosion seront également explorées.

Dans une seconde étape, on tentera de considérer d'autres EDP de type ondes, impliquant un opérateur de diffusion plus général, comme c'est le cas pour cette équation

$$\partial_t^2 u = \mathrm{div}(A(x)\nabla u) + b(x)|u|^{p-1}u,$$

où $A(x)$ est une matrice $N \times N$ singulière en un point, et $b(x)$ également singulière en ce même point.

Références

[1] S. Alinhac. *Blowup for nonlinear hyperbolic equations*, volume 17 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1995.

[2] A. Azaiez and H. Zaag. Classification of the blow-up behavior for a semilinear wave equation with nonconstant cofficients. 2019. submitted, arXiv:1908.02081.

[3] H. A. Levine. Remarks on the growth and nonexistence of solutions to nonlinear wave equations. In *A seminar on PDEs—1973*, pages 59–70. Rutgers Univ., New Brunswick, N.J., 1973.

[4] H. A. Levine. Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 5 :138–146, 1974.

[5] F. Merle and H. Zaag. Determination of the blow-up rate for the semilinear wave equation. *Amer. J. Math.*, 125 :1147–1164, 2003.

[6] F. Merle and H. Zaag. Blow-up rate near the blow-up surface for semilinear wave equations. *Internat. Math. Res. Notices*, (19) :1127–1156, 2005.

[7] F. Merle and H. Zaag. Determination of the blow-up rate for a critical semilinear wave equation. *Math. Annalen*, 331(2) :395–416, 2005.

[8] F. Merle and H. Zaag. Existence and universality of the blow-up profile for the semilinear wave equation in one space dimension. *J. Funct. Anal.*, 253(1) :43–121, 2007.

[9] F. Merle and H. Zaag. Openness of the set of non characteristic points and regularity of the blow-up curve for the 1 d semilinear wave equation. *Comm. Math. Phys.*, 282 :55–86, 2008.

[10] F. Merle and H. Zaag. Blow-up behavior outside the origin for a semilinear wave equation in the radial case. *Bull. Sci. Math.*, 135(4) :353–373, 2011.

[11] F. Merle and H. Zaag. Existence and classification of characteristic points at blow-up for a semilinear wave equation in one space dimension. *Amer. J. Math.*, 134(3) :581–648, 2012.

[12] F. Merle and H. Zaag. Isolatedness of characteristic points for a semilinear wave equation in one space dimension. *Duke Math. J.*, 161(15) :2837–2908, 2012.

[13] F. Merle and H. Zaag. On the stability of the notion of non-characteristic point and blow-up profile for semilinear wave equations. *Comm. Math. Phys.*, pages 1–34, 2015.

[14] F. Merle and H. Zaag. Dynamics near explicit stationary solutions in similarity variables for solutions of a semilinear wave equation in higher dimensions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 368(1) :27–87, 2016.

[15] P. Radu, G. Todorova, and B. Yordanov. Decay estimates for wave equations with variable coefficients. *Trans. Am. Math. Soc.*, 362(5) :2279–2299, 2010.