SUJET DE THÈSE. THÉORIE DE LA DÉFORMATION DÉRIVÉE ET QUANTIFICATION DES BIGÈBRES DE LIE INVOLUTIVES PAR LES ALGÈBRES BV SUPÉRIEURES

GRÉGORY GINOT, SINAN YALIN

Table des matières

Ce projet de thèse est proposé sous la direction de Gregory Ginot (LAGA - Université Sorbonne Paris Nord) et la co-direction de Sinan Yalin (LAREMA - Université d'Angers). Il s'inscrit à la croisée de plusieurs sujets de recherches d'actualité : théorie des catégories supérieures, théorie de l'homotopie, théorie des déformations en géométrie algébrique dérivée, quantification par déformation en physique mathématique.

1. Motivations

Les bigèbres de Lie sont un sujet central en géomètrie et physique mathématique depuis les travaux fondateurs de Drinfeld, Jimbo, Turaev, Reshetekin, Kazdhan et leurs écoles au milieu des années 80.

Depuis, les progrès en théorie des catégories supérieures et homotopie, ont permis de faire émérger des exemples fondamentaux de bigèbres de Lie involutives *décalées* (c'est-à-dire telles que le crochet ou cocrochet de Lie a un degré cohomologique possiblement non nul). Ces exemples proviennent notamment de la topologie des cordes et de la topologie symplectique et encodent, d'un point de vue physique mathématiques, des théories des champs supérieures et symplectiques. Par exemple, ces structures apparaissant naturellement sur l'homologie S^1-équivariante des espaces de lacets libres sur les variétés en topologie des cordes [3] et leurs versions homotopiques sont au centre de l'approche de Fukaya et al [5] pour décrire les théories des champs symplectiques.

On sait d'autre part comment construire, à partir d'une bigèbre de Lie involutive *non* décalée, une algèbre de Batalin-Vilkovisky (algèbre BV), notion qui joue non seulement un rôle clé en physique mathématique (formalisme de Batalin-Vilkovisky) mais forme la structure algébrique de l'homologie (non équivariante) des espaces de lacets libres. De plus les structures de bigèbres de Lie involutives décalées au niveau dg (chaines sur les espaces de lacets) jouent un rôle crucial dans la compréhension du pont entre topologie des cordes équivariante et théorie des champs symplectiques [4, 5] (invariants associés à la théorie de Gromov-Witten des variétés symplectiques).

Ainsi, en topologie des cordes comme en topologie symplectique, *il est fondamental de comprendre la théorie des déformations de telles structures et ce que l'on appelle leur quantification par déformation* (déformation formelle non commutative de la structure considérée). Le processus de quantification par déformation, développé en physique mathématique notamment dans les deux directions que sont la quantification des variétés de Poisson (célèbre résultat de Kontsevich) et la théorie des groupes quantiques (introduite par Drinfeld et al), a permis des avancées fondamentales, par exemple en topologie via les invariants quantiques des variétés devenus un sujet de recherche majeur.

2. Description du sujet

Récemment, les travaux de Ginot et Yalin [6, 7] ont permis d'une part de développer une théorie des déformations générale et explicite des structures algébriques différentielles graduées (dg) dans le cadre de la théorie des problèmes de modules formels dérivés [9, 13], d'autre part d'appliquer ces outils à la quantification par déformation des bigèbres de Lie à homotopie près. Ils fournissent donc le cadre adéquat dans lequel se pencher sur la problématique énoncée ci-dessus, c'est-à-dire la généralisation de ces résultats aux bigèbres de Lie involutives décalées. Une version homologique en dimension 2 de cette quantification a été obtenue par Turaev, à la suite des travaux de Goldman sur la structure de bigèbre de Lie involutive des lacets libres sur une surface, et a permis la construction d'invariants quantiques des noeuds et variétés de dimension 3.

Ce projet de thèse a pour but de donner une large généralisation (nécessairement homotopique) de ces résultats en dimension quelconque ce qui permettra, à plus long terme, et de construire de nouveaux invariants quantiques des variétés.

2.1. **Théories des déformations dérivée des bigèbres de Lie involutives et algèbres BV.** Le premier point est de démontrer que les bigèbres de Lie involutives à homotopie près sont équivalentes en un sens homotopique (plus précisément en tant qu'∞-catégories) aux algèbres BV à homotopie près, qui sont paramétrées par une version framed de l'opérade E_2 des petits disques. On montrera que cette correspondance s'étend aux bigèbres de Lie involutives décalées et à une version décalée des algèbres BV que l'on appelle algèbres BV supérieures (algèbres BV_n). La construction de la notion correcte d'algèbre BV supérieure sera elle aussi une des nouveautés qu'apportera ce projet. Elle doivent apparaitre comme des déformations des opérades des petits disques en dimension supérieures. Un premier objectif principal de la thèse sera de démontrer le résultat suivant :

Conjecture 2.1. *L'∞-catégorie des bigèbres de Lie involutives $n-2$-décalées est équivalente à celle des algèbres BV_n via une version appropriée de la construction bar. Cette équivalence s'étend de plus en une équivalence de préchamps en ∞-catégories d'algèbres dans les dg-A-modules (A une algèbre commutative dg).*

Les outils de théorie des déformations dérivée des structures algébriques développés dans [7] s'adapteront alors à ce cadre pour en déduire :

Conjecture 2.2. *Le problème de modules formels dérivé contrôlant les déformations d'une bigèbre de Lie involutive décalée est équivalent à celui contrôlant les déformations de l'algèbre BV supérieure correspondante.*

A la suite des travaux de Lurie [9], on sait décrire les complexes de déformations de problèmes de modules formels, et on s'attend à ce que celui associé à une algèbre BV_n se décrive comme une modification adéquate de la cohomologie de Hochschild supérieure des algèbres E_n.

2.2. **Quantification par déformation.** Dans le cadre ∞-catégorique adéquat de théorie des déformation dérivée des structures algébriques s'inspirant de nos travaux antérieurs [6, 7], la quantification par déformation des bigèbres de Lie involutives décalées découle des précédents résultats de la manière suivante : l'équivalence naturelle d'∞-préchamps construite dans la première partie induit des équivalence de problèmes de modules formels dérivés en chaque point de ces préchamps, qui elle-mêmes induisent des quasi-isomorphismes de complexes de déformations. On cherchera à établir des calculs de théorèmes de formalité à la Kontsevich pour ce type de structures :

Conjecture 2.3. *Ces quasi-isomorphismes tangents sont des morphismes de formalité quantifiant les bigèbres de Lie involutives décalées en algèbres BV supérieures : étant donné un dg module V, on obtient une famille de morphismes de formalité paramétrée par l'espace de modules des structures de bigèbres de Lie involutives décalées sur V qui quantifient ces dernières.*

Références

[1] D. Calaque, T. Pantev, B. Toen, M. Vaquié, G. Vezzosi, *Shifted Poisson structures and deformation quantization*, J. Topol. 10 (2017), 483-584.

[2] M. Chas, D. Sullivan, *String Topology*, preprint arXiv :math/9911159.

[3] M. Chas, D. Sullivan, *Closed string operators in topology leading to Lie bialgebras and higher string algebra*, The legacy of Niels Henrik Abel, 771 ?784, Springer, Berlin, 2004.

[4] K. Cieliebak, J. Latschev, *The role of string topology in symplectic field theory*, arXiv :0706.3284v2.

[5] K. Cieliebak, K. Fukaya, J. Latschev, *Homological algebra related to surfaces with boundary*, Quantum Topol. 11 (2020), 691-837.

[6] G. Ginot, S. Yalin, *Deformation theory of bialgebras, higher Hochschild cohomology and Formality*, arXiv :1606.01504.

[7] G. Ginot, S. Yalin, *Derived deformation theory of algebraic structures*, arXiv :1910.07255.

[8] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. 66 (2003), no. 3, 157-216.

[9] J. Lurie, *Derived Algebraic Geometry X : Formal Moduli Problems*, available at http ://www.math.harvard.edu/ lurie/

[10] J. Lurie, *Higher topos theory*, Annals of Mathematics Studies 170, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[11] J. Lurie, *Higher Algebra*, September 2017 version, book available at http ://www.math.harvard.edu/ lurie/

[12] B. Toen, *Derived Algebraic Geometry*, EMS Surv. Math. Sci. 1 (2014), no. 2, 153-245.

[13] B. Toen, *Problèmes de modules formels*, Exposé Bourbaki du 16 Janvier 2016.