Farrell Brumley
Mathematics Department
Université Sorbonne Paris Nord
99, Avenue Jean-Baptiste Clément
93430 Villetaneuse
France

Paris, May 15, 2021

Propriétés de concentration des relèvements de thêta dans les tours de congruences

L'objet de cette thèse est d'étudier la distribution des valeurs des formes automorphes sur des espaces localement symétriques associés à certains groupes orthogonaux ou unitaires lorsque le structure de niveau varie dans une famille convenable. Une attention particulière sera accordée aux formes automorphes qui participent dans la correspondance de thêta d'un groupe symplectique de petite taille, qui sont connues d'exhiber un comportement atypique. Le problème serait de quantifier précisément la croissance exceptionnelle des valeurs de ces fonctions en des points ayant une structure rationnelle, dans une tour de congruences.

Principe de délocalisation

Bien que la thématique de la thèse porte sur la variation de structure de niveau, les origines de la théorie se trouvent dans le domaine qu'on appelle aujourd'hui "chaos quantique", qui opère dans la limite semi-classique. Il est commode de rappeler ces origines pour bien situer le problème dans la littérature.

Inspirée par la physique mathématique, la question centrale du chaos quantique est d'établir des liens entre un système hamiltonien chaotique et sa quantisation, souvent sous la forme des propriétés de délocalisation des états propres. Plus précisément, sur une variété riemannienne compacte Y, on s'intéresse au flot géodésique $\mathcal{G}_t$ sous-jacente, qui définit un système hamiltonien sur le fibré tangent unitaire SY. Si Y est de courbure négative, ce système est *chaotique*, dans le sens que presque toute orbite s'équidistribue sur SY. La quantisation de ce système est donnée par le laplacien Δ agissant sur $L^2(Y)$. À partir d'une fonction propre $\psi_\lambda \in L^2(Y)$ vérifiant $(\Delta + \lambda^2)\psi_\lambda = 0$ et $\|\psi_\lambda\|_2 = 1$ on peut définir une mesure de probabilité sur Y par la formule $\mu_{\psi_\lambda} = |\psi_\lambda|^2 \,\mathrm{dVol}$. La mesure μ_{ψ_λ} s'interprète comme la probabilité qu'une particule libre, suivant le flot géodésique sur Y et d'énergie λ, se trouve dans l'état ψ_λ. En vue des propriétés d'équidistribution du flot géodésique, on s'attend à ce que la suite de mesures μ_{ψ_λ} tende vers la mesure de Liouville lorsque $\lambda \to \infty$. Il s'agit d'une propriété de délocalisation *au sens faible*, appelée Unique Ergodicité Quantique, qui a connu beaucoup d'avancées récentes, grâce en particulier à Lindenstrauss (dans le cas arithmétique) et Anantharaman et son école (dans le cas général).

On peut également chercher à démontrer des propriétés de délocalisation *au sens fort*, telles que des majorations non triviales des normes L^p. Au contraire du cadre précédent, ici, le cas des variétés arithmétiques se distinguent du cas général, car on y rencontre des phénomènes de concentration *intermédiaires*, liées aux symétries adéliques de ces espaces, incarnées par les opérateurs de Hecke. Dans le prochain paragraphe, on rappellera quelques résultats fondateurs dans cette ligne de recherche.

Suites exceptionnelles

Dans la théorie des formes automorphes, on s'intéresse aux fonctions définies sur un espace localement symétrique de volume fini. Si telle est la variété Y, elle s'identifie à un quotient $\Gamma\backslash S$, avec S un espace globalement symétrique riemannien et Γ un réseau dans le groupe des isométries $G = \mathrm{Isom}(S)$ de S. On supposera désormais G semi-simple et non compact, ce qui entraine la non positivité de la courbure de M.

Soit $Y = \Gamma\backslash S$ espace localement symétrique compact, où Γ est un réseau de type congruences. Par *fonction propre arithmétique* (ou forme de Hecke–Maass) on entend une fonction propre simultanée de l'algèbre de Hecke non ramifiée ainsi que l'algèbre des opérateurs différentiels invariants. Fixons une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $L^2(Y)$ constituée de fonctions propres arithmétiques. En particulier, toute $\psi_\lambda \in \mathcal{B}$ est fonction propre du laplacien et on peut écrire $(\Delta + \lambda^2)\psi_\lambda = 0$. On appellera *tempérée* toute sous-suite $\{\psi_{\lambda_i}\}$ de $\mathcal{B}$ telle que $\|\psi_{\lambda_i}\|_\infty \ll_\epsilon \lambda_i^\epsilon$; une sous-suite non tempérée sera *exceptionnelle*. On s'attend à ce qu'une suite générique de fonctions propres arithmétiques soit tempérée, donc fortement délocalisée. Autrement dit, une suite exceptionnelle, si elle existe, devrait être de densité zéro. Dans ce langage, une conjecture bien connue, mais hors de portée, de Iwaniec–Sarnak [5] prétend que sur une surface hyperbolique (arithmétique ou pas) toute suite est tempérée, sans exception.

Rudnick et Sarnak [6] étaient les premiers à trouver un exemple d'un espace localement symétrique arithmétique qui admet des fonctions propres exceptionnelles. Ils démontrent que pour certaines variétés compactes hyperboliques Y de dimension 3, de type congruence, il existe $\psi_i \in L^2(Y)$ telle que

$$\|\psi_i\|_\infty \gg \lambda_i^{1/2}\|\psi_i\|_2, \qquad (\Delta + \lambda_i^2)\psi_i = 0 \qquad (\lambda_i \to \infty).$$

Ces fonctions sont bien de densité zéro dans le spectre L^2 de Δ; elles sont en fait dans l'image de la correspondance de thêta de SL_2.

Plus généralement, dans l'article plus récent [1] on trouve des conditions suffisantes sur un groupe $\mathbf{G}$, supposé connexe presque simple et anisotrope sur $\mathbb{Q}$, pour que les espaces localement symétriques y associés admettent des suites exceptionnelles.

Variation du niveau

En parallèle à la limite semi-classique existe le *régime de grande échelle spatiale*, où à la place de varier la valeur propre λ, on varie l'espace Y dans une famille de volume croissante. Dans ce contexte, le résultat phare dans l'étude de la délocalisation faible est celui de Anantharaman–Le Masson, qui établit l'ergodicité quantique pour les grands graphes réguliers.

En revanche, des résultats de délocalisation forte, quand on varie le niveau, sont peu nombreux. Dans le cas où Y est compact, qui est le nôtre, il n'y a que le résultat dans [1] mentionné ci-haut, qui démontre en fait une borne inférieure par rapport au niveau et la valeur propre simultanément. Il faut plus de soin pour l'énoncer, par contre, car il existe déjà une borne inférieure triviale dûe à la grande dimension des espaces propres par rapport au niveau. Plus précisément, si Y est une variété riemannienne compacte et V_λ est un espace propre dans $L^2(Y)$ pour le laplacien, alors il existe toujours $\psi_\lambda \in V_\lambda$ vérifiant $\|\psi_\lambda\|_\infty \geq \sqrt{\dim V_\lambda}\|\psi_\lambda\|_2$.

Par ailleurs, si on considère une tour de recouvrements de congruences Y_N de Y, les espaces propres auront de grande dimension grace aux multiplicités dans les représentations à des places divisant N. Par conséquence, on se contentera de faire mieux que la borne $\sqrt{\dim V_N}$, où V_N est maintenant un espace propre joint pour le laplacien et les opérateurs de Hecke.

Les recouvrements Y_N de Y que l'on considérera seront d'une nature spéciale; pour les définir il faut introduire un peu plus de notations. Soit $\mathbf{G}$ un groupe semisimple sur $\mathbb{Q}$ qui satisfait les conditions décrites dans [1]. En particulier on dispose d'une involution θ de $\mathbf{G}$ qui induit une involution de Cartan sur $\mathbf{G}(\mathbb{R})$. Soit $\mathbf{H}$ la composante neutre du groupe de points fixes de θ. Soit K et K_H des sous-groupes compacts ouverts de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ et $\mathbf{H}(\mathbb{A}_f)$ qui sont hyperspéciaux presque partout. Pour $N \geqslant 1$ soit $K(N)$ le sous-groupe de congruences principal de K et munissons l'espace localement symétrique

$$Y_N = \mathbf{G}(F)\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A})/K(N)K_H K_\infty$$

de la mesure naturelle de probabilité. D'après [1] il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\|\psi_i\|_\infty \gg N^\delta \lambda_i^\delta \sqrt{\dim V_N}\|\psi_i\|_2, \qquad (\Delta + \lambda_i^2)\psi_i = 0 \qquad (\lambda_i, N \to \infty), \tag{1}$$

ce qui démontre l'existence des suites exceptionnelles dans cette tour de congruence.

Le projet

Le résultat dans (1) n'est pas satisfaisant, par contre, car la valeur de l'exposant δ n'est ni explicite ni effective, dans le sens qu'elle n'est pas logiquement calculable! Mais il est important d'expliciter une telle borne, en vue d'une conjecture de pureté de Sarnak [7], qui prévoit, au moins dans la limite de grande fréquence λ, que les exposants de croissance L^∞ devraient être des demi-entiers. (Pour référence, une suite tempérée aura un exposant de croissance L^∞ nul.) En revanche aucune conjecture dans ce sens n'a même été énoncée lorsque le niveau varie.

Le projet de cette thèse est de fournir une large classe d'exemples, chez les groupes classiques, où l'on peut donner une borne inférieure explicite et raffinée dans les tours de congruences spéciales Y_N définies ci-haut. La méthode serait modélisée sur celle de Rudnick et Sarnak [6], qui fonctionne en relation directe avec la correspondance de thêta, et non pas la méthode de [1], qui est plus robuste mais moins précise. Il s'agit de comparer deux formules des traces, et utiliser une relation de périodes qui distinguent les relèvements de thêta, à l'instar de [2]. Le travail de fond consistera à contrôler les termes d'erreur dans les formules des traces lorsque N varie, comme dans [8], ainsi que de quantifier la conservation des structures de niveau dans la correspondance de thêta locale, en s'appuyant sur les travaux antérieurs de Cossutta [3] et Cossutta–Marshall [4].

References

[1] F. Brumley et S. Marshall, Lower bounds for Maass forms on semisimple groups, Compositio Mathematica, Volume 156, Issue 5, May 2020, pp 959–1003.

[2] F. Brumley et S. Marshall, Concentration properties of theta lifts on hyperbolic grassmannians, preprint

[3] Cossutta, M. Asymptotique des nombres de Betti des variétés arithmétiques. Duke Mathematical Journal 150, no. 3 (2009): 443–88.

[4] M. Cossutta and S. Marshall. "Theta Lifting and Cohomology Growth in p-adic Towers," International Mathematics Research Notices, rns139, 23 pages. (2012)

[5] H. Iwaniec et P. Sarnak, L^∞ norms of eigenfunctions of arithmetic surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 141(2):301–320, 1995.

[6] Zeév Rudnick et Peter Sarnak. The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 161(1):195–213, 1994.

[7] P. Sarnak. Letter to Morawetz, http://publications.ias.edu/sarnak/paper/480

[8] S.W. Shin et N. Templier, Sato-Tate theorem for families and low-lying zeros of automorphic L-functions, *Invent. Math.* 2015.