UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS NORD
Institut Galilée
99, Avenue Jean-Baptiste Clément
93430 Villetaneuse, France

Bruno VALLETTE et Geoffroy HOREL

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications

vallette@math.univ-paris13.fr & horel@math.univ-paris13.fr

www.math.univ-paris13.fr/∼vallette & geoffroy.horel.org

Paris, le 26 avril 2021

Proposition de sujet de thèse

STRUCTURES SUPÉRIEURES, FORMALITÉ ET INVARIANTS DE GROMOV–WITTEN

Le thème de ce projet de thèse est l'étude homotopique des structures supérieures apparaissant dans le contexte des invariants de Gromov–Witten. Avant d'en décrire les objectifs principaux, nous commençons par dresser un rapide état de l'art de ce domaine.

Structure supérieures. La cohomologie de n'importe quel espace topologique possède une structure d'algèbre commutative graduée induite par le produit cup. Il est maintenant bien compris que le produit cup est induit par une structure d'algèbre E_∞ sur les cochaînes singulières. En bref, une algèbre E_∞ est une algèbre commutative *à homotopie près*, c'est-à-dire que les axiomes de commutativité et d'associativité ne sont pas satisfaits strictement mais qu'on se donne à la place une collection infinie d'homotopies cohérentes qui induisent les relations voulues au niveau de la cohomologie. L'existence de cette structure E_∞ au niveau des cochaînes est ce qui permet de construire les opérations supérieures sur la cohomologie : produits de Massey et opérations de Steenrod, par exemple.

C'est ce type de structure riche qui a permis de résoudre le programme principal de la topologie algébrique au 20ème siècle : trouver des invariants algébriques fidèles du type d'homotopie des espaces topologiques. En effet, un théorème fondamental dû à M. Mandell [Man06] affirme que le type d'homotopie de X est déterminé par la classe de la E_∞-algèbre $C^*(X,\mathbb{Z})$ à quasi-isomorphismes près. Ce théorème est en fait une généralisation d'un théorème tout aussi fondamental dû à D. Sullivan [Sul77] qui affirme que le type d'homotopie *rationnel* de X est déterminé par la classe de la E_∞-algèbre $C^*(X,\mathbb{Q})$ à quasi-isomorphismes près. L'apport du théorème de Mandell est surtout théorique car la E_∞-algèbre $C^*(X,\mathbb{Z})$ est un objet souvent trop compliqué pour permettre d'en extraire des informations calculables. Au contraire le théorème de Sullivan est d'un très grand intérêt pratique car les cochaînes à coefficients rationnels sur un espace sont souvent quasi-isomorphes à des algèbres commutatives différentielles graduées simples.

Formalité d'après Deligne–Griffiths–Morgan–Sullivan. Le cas optimal de ce phénomène est la situation appelée *formalité* : une algèbre commutative différentielle graduée (A,d) est formelle si elle est quasi-isomorphe à son algèbre commutative graduée de cohomologie $H^*(A)$, c'est-à-dire à différentielle nulle. Un espace topologique est dit *formel* si l'algèbre commutative différentielle graduée $C^*(X,\mathbb{Q})$ est formelle. Cette notion provient du théorème fondateur de Deligne–Griffiths–Morgan–Sullivan [DGMS75] affirmant que les variétés Kähleriennes compactes sont formelles (à coefficients dans $\mathbb{Q}$). Concrètement cela implique que toute l'information sur le type d'homotopie rationnel de ces espaces, comme les groupes d'homotopie tensorisés avec $\mathbb{Q}$ munis du crochet de Whitehead par exemple, est encodée dans l'algèbre de cohomologie $H^*(X,\mathbb{Q})$. Ce résultat est tout à fait remarquable car il exhibe le lien très étroit entre l'homotopie et la géométrie.

Invariants de Gromov–Witten. Les invariants de Gromov–Witten sont des invariants des variétés sympectiques qui peuvent se voir comme une “déformation quantique” du produit cup. Les relations vérifiées par ces derniers se codent efficacement avec le calcul opéradique : les invariants de Gromov–Witten munissent la cohomologie d’une variété symplectique compacte d’une structure d’algèbre sur l’opérade modulaire $H_*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$. Une telle structure algébrique est aussi appelée *théorie cohomologique des champs* [KM96] ou *variété de Frobenius* [Man99]. Le genre 0 se restreint à une opérade cyclique $H_*(\overline{\mathcal{M}}_{0,n})$, dont les algèbres sont appelées *hypercommutatives*, et qui contient la sous-opérade $H_0(\overline{\mathcal{M}}_{0,n})$ isomorphisme à celle codant les algèbres commutatives. Une telle structure généralise donc bien le produit cup.

Il se trouve que la compactification de Deligne–Mumford $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ de l’espace de module des courbes avec n points marqués admet déjà une structure d’opérade modulaire au niveau topologique en recollant les points. Se pose alors avec acuité et depuis de nombreuses années la question de relever la définition des invariants de Gromov–Witten au niveau des cochaînes. Une telle construction a été récemment donnée en genre 0 pour les variétés projectives lisses par E. Mann et M. Robalo [MR18] en utilisant les méthodes de la géométrie algébrique dérivée. Comme attendu, une telle généralisation utilise de manière cruciale des structures opéradiques supérieures.

OBJECTIF 1 : Les invariants de Gromov–Witten construits au niveau des cochaînes par Mann–Robalo sont-ils formels ? Plus précisément, existe-t-il un zig-zag de quasi-isomorphismes entre $C^*(X,\mathbb{Q})$ et $H^*(X,\mathbb{Q})$ compatibles avec les structures hypercommutatives (à homotopie près) sur les deux objets ? Pour attaquer cette question, l’approche proposée est d’utiliser la théorie de Hodge comme chez Deligne–Griffiths–Morgan–Sullivan. En effet, ce théorème peut se justifier de manière intuitive en observant que les opérations supérieures sur la cohomologie des variétés doivent être compatibles à la structure de Hodge. Comme les variétés projectives lisses ont une structure de Hodge *pure* (le groupe de cohomologie de degré n a une structure de Hodge pure de poids n), ces opérations supérieures doivent s’annuler. Cette méthode a été exploitée opéradiquement dans le magnifique article [GSNPR05] de Guillén–Navarro–Pascual–Roig et poussée à son comble dans l’article récent [CH20] de Cirici–Horel pour donner la démonstration la plus générale et fonctorielle du théorème de Deligne–Griffiths–Morgan–Sullivan. Pour pouvoir répondre à la question ci-dessus, il faudra néanmoins généraliser cette méthode encore plus loin pour pouvoir l’appliquer aux types d’espaces de modules qui apparaissent dans le travail de Mann-Robalo qui sont des objets dérivés.

OBJECTIF 2 : Étudier la formalité de la structure d’algèbre hypercommutative à homotopie près sur la cohomologie de De Rham des variétés de Poisson définie par Dotsenko–Shadrin–Vallette dans [DSV15]. Cette dernière structure définit de nouveaux invariants supérieurs des variétés de Poisson. On peut donc se demander lesquelles de ces opérations s’annulent uniformément dans certaines cas particuliers comme les variétés symplectiques, par exemples. Un tel résultat serait particulièrement apprécié car il fournirait des classes d’obstruction pour de telles structures. La méthode d’étude envisagée consiste à considérer la coopérade $H^{*+1}(\mathcal{M}_{0,n})$ qui forme les générateurs de l’opérade associée. La duale linéaire de cette coopérade, duale de Koszul de l’opérade $H_*(\overline{\mathcal{M}}_{0,n})$, code les algèbre *gravité*. Or Dupont–Horel ont récemment donné dans [DH18] des modèles géométriques de cette dernière et qui sont particulièrement adaptés au problème considéré ici.

RÉFÉRENCES

[CH20] Joana Cirici and Geoffroy Horel, Mixed Hodge structures and formality of symmetric monoidal functors, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **53** (2020), no. 4, 1071–1104. 2

[DGMS75] Pierre Deligne, Phillip Griffiths, John Morgan, and Dennis Sullivan, Real homotopy theory of Kähler manifolds, Invent. Math. **29** (1975), no. 3, 245–274. 1

[DH18] Clément Dupont and Geoffroy Horel, On two chain models for the gravity operad, Proc. Am. Math. Soc. **146** (2018), no. 5, 1895–1910. 2

[DSV15] Vladimir Dotsenko, Sergey Shadrin, and Bruno Vallette, De Rham cohomology and homotopy Frobenius manifolds, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **17** (2015), no. 3, 535–547. 2

[GSNPR05] F. Guillén Santos, V. Navarro, P. Pascual, and A. Roig, Moduli spaces and formal operads, Duke Math. J. **129** (2005), no. 2, 291–335. 2

[KM96] M. Kontsevich and Yu. Manin, Quantum cohomology of a product, Invent. Math. **124** (1996), With an appendix by R. Kaufmann. 2

[Man99] Yuri I. Manin, Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 47, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. 2

[Man06] Michael A. Mandell, Cochains and homotopy type, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2006), no. 103, 213–246. 1

[MR18] Etienne Mann and Marco Robalo, Brane actions, categorifications of Gromov-Witten theory and quantum K-theory, Geom. Topol. **22** (2018), no. 3, 1759–1836. 2

[Sul77] D. Sullivan, Infinitesimal computations in topology, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1977), no. 47, 269–331 (1978). 1