

## Sujet de thèse

# Optimisation combinatoire pour la prise de décision sous critères multiples

## Contexte

Ce sujet a pour ambition de lier des concepts existants en théorie de la décision et optimisation combinatoire en présence de critères multiples. La théorie de la décision est un domaine des sciences sociales étudiant comment des groupes d'individus peuvent choisir une solution commune, ou comment un individu peut faire un choix face à des critères différents. Un exemple classique est de trouver un chemin réalisant un bon compromis entre la longueur de son trajet et le coût induit (par exemple le prix d'un péage). Un autre exemple classique est de déterminer une affectation de ressources qui réalise un compromis entre les souhaits de plusieurs personnes: par exemple choisir des attributions de budget au sein d'une assemblée représentative.

Ainsi cette thèse abordera la problématique de la résolution de problèmes de décision via des techniques d'optimisation combinatoire. En effet, plusieurs concepts de sciences sociales et économiques mènent à plusieurs modélisations possibles de problèmes de décisions: on distingue surtout l'optimisation multiobjectif et la prise de décision multicritère. Le cadre de la thèse est de permettre la résolution de ces problèmes en utilisant des méthodes avancées en optimisation mathématique. Ce sujet s'insère ainsi entre Informatique, Recherche Opérationnelle et Théorie de la Décision.

Contrairement à l'optimisation mono-objectif discrète où il existe (ou non) des solutions optimales, optimiser en considérant plusieurs objectifs demande de définir quelles sont les solutions qui répondent aux attentes de ce problème. Cette question a été largement abordée au travers de plusieurs concepts existants dans des communautés différentes en théorie de la décision. Nous nous intéresserons à deux concepts distincts.

- **Optimisation multiobjectif** est souvent synonyme d'énumération de toutes les solutions non-dominées au sens de Pareto. Un optimum de Pareto est une prise de décision pour laquelle il n'existe pas une alternative dans laquelle tous les acteurs seraient dans une meilleure position. Bien que théoriquement de taille exponentielle, le front de Pareto peut être énuméré en pratique dans des contextes appliqués où l'on connaît à l'avance des intervalles réduits acceptables sur les objectifs.
- **Décision multicritère** désigne souvent la détermination d'une solution réalisant un compromis entre les différents critères. De tels compromis peuvent alors posséder de bonnes propriétés pour respecter par exemple une certaine équité entre les personnes. Par exemple, en économie, vérifier le principe de transfert de Pigou-Dalton qui énonce qu'un transfert de revenus entre une personne riche A et une personne pauvre B est souhaitable tant que cela ne met pas A dans une situation où il serait plus pauvre que B.

Une technique très étudiée est de ramener ces problématiques à des problèmes monocritères via l'utilisation de fonctions d'agrégation. Ces fonctions, et en particulier la fonction OWA (Ordered Weighted Averaging), ont de très bonnes propriétés mais rendent les problèmes combinatoires difficiles à résoudre: par exemple le problème largement polynomial d'affectation biparti devient NP-difficile sous l'objectif OWA.

L'objectif de cette thèse est de mettre en œuvre des techniques avancées en optimisation mathématique afin de concevoir des méthodes d'aide à la décision se basant sur l'optimisation combinatoire dans ces cadres multiobjectif et multicritère.

## Approches théoriques et objectifs expérimentaux

Sur les deux aspects multiobjectif et multicritère, plusieurs approches théoriques sont envisagées.

- Concernant l'**optimisation multiobjectif**:

Déterminer un tel ensemble de solutions nécessite une exploration par algorithme de branchement de l'espace de solutions en le croisant avec l'espace des objectifs. Des résultats issus de la théorie de la décision proposent une généralisation de l'élagage classique dans les arbres de branchement depuis le mono vers le multiobjectif. Les valeurs bornantes supérieures et inférieures sont remplacées par des ensembles bornants. Les performances d'un algorithme de branchement multiobjectif repose ainsi sur la réduction de la taille de ces ensembles. La thèse abordera le renforcement de ces algorithmes de branchement en étudiant les polyèdres associés sous différents aspects: en effet, plusieurs combinatoires sont concernées:

- une première approche est celle de l'étude des liens entre espace de solutions et espace des objectifs/critères dans le but de fournir des inégalités valides pour obtenir de meilleures bornes lors de l'exploration. Cette approche, bien que classique, n'a pas été approfondie dans la littérature [5, 1].
- une autre approche (moins classique) concerne la combinatoire associée à la dominance entre solutions. En effet, une telle dominance a été récemment traduite par des inégalités linéaires en cas monobjectif [2]. L'idée est ici d'étendre ce concept au cas multiobjectif.

D'autres approches sont également à considérer comme des techniques de décomposition. Il est aussi très intéressant d'étendre ces résultats à des objectifs linéaires ou non-linéaires.

La mise en œuvre informatique sera intégrée au sein du projet VoptSolver [6] qui propose un cadre de logiciel libre pour la résolution de programmes linéaires multi-objectifs. Les algorithmes et les inégalités proposées par ces travaux pourront ainsi être testés dans le contexte de cet outil sur des bases d'instances utilisées par la communauté scientifique.

Une collaboration peut être envisagée avec le laboratoire LS2N de Nantes et le département de Management Science de la Management School de Lancaster au Royaume-Uni.

- Concernant la **décision multicritère**:

La littérature propose plusieurs techniques permettant d'utiliser des fonctions d'agrégation (comme la fonction OWA) en tant que fonctions objectifs de programmes linéaires en nombres entiers. Ces techniques ont été utilisées pour des problèmes combinatoires classiques comme le plus court chemin par exemple ou l'affectation biparti. Pourtant ces techniques restent assez limitées quant à la taille des instances. La thèse abordera des formulations nouvelles pour la décision multicritère au travers de la programmation linéaire et éventuellement non-linéaire afin de résoudre des instances de plus grandes tailles par les approches polyédrales et les approches par décomposition. En effet, les formulations existantes dans la littérature fournissent des relaxations de piètre qualité qui peuvent être renforcées par l'ajout d'inégalités issues du polyèdre étendu par les variables modélisant la fonction d'agrégation. En particulier, une formulation a été proposée [3] dans le cadre d'une collaboration précédente. De même, on peut envisager de proposer des approches de décomposition [4] adaptées à cette problématique pour améliorer les valeurs de relaxation.

Il sera abordé diverses problématiques peu rencontrées dans la littérature dans leur version multicritère: la planification d'emploi du temps, le transport, l'attribution équitable de budgets... Il est à noter que les techniques de l'optimisation mathématique qui seront abordées peuvent également trouver des applications indirectes en théorie des jeux (jeux collaboratifs) ou en explicitation du processus de décision.

Une collaboration peut être envisagée avec l'équipe Décision du laboratoire LIP6 de Paris.

## Encadrement et financement de thèse

Co-directeur: Pierre Fouilhoux, PR, LIPN

Co-directeur: Lucas Létocart, MCF-HDR, LIPN

Les deux co-directeurs ont des compétences complémentaires en optimisation mathématique, notamment autour des approches polyédrales et des méthodes de décomposition, avec des applications en théorie de la décision multicritère et de l'optimisation multiobjectif. Pierre Fouilhoux est co-directeur (50%) d'une allocation doctorale de l'Université Sorbonne Paris Nord obtenue en 2020. Lucas Létocart n'est directeur ou co-directeur d'aucune allocation doctorale de l'Université Sorbonne Paris Nord obtenue depuis les trois dernières années.

Ce sujet de thèse correspond à une demande de financement sur demi-bourse de l'école doctorale Galilée. Le complément de financement (45k€) sera fourni par 2 sources:

- reliquat de contrats CIFRE hébergés au LIPN (15k€),
- reliquat de contrats CIFRE hébergés actuellement au LIP6 (30k€) par une convention de reversement du LIP6 vers le LIPN en raison du départ de Pierre Fouilhoux du LIP6 vers le LIPN en 2020.

## Bibliographie :

- [1] Cerqueus A. Bi-objective branch-and-cut algorithms applied to the binary knapsack problem : surrogate bound sets, dynamic branching strategies, generation and exploitation of cover inequalities. *Rapport de thèse*, 2015.
- [2] Falq A-E, Fouilhoux P. and Kedad-Sidhoum S., Linear inequalities for neighborhood based dominance properties for the common due-date scheduling problem *To appear in European Journal of Operational Research*, 2021.
- [3] Fouilhoux P., Spanjaard O. Une nouvelle linéarisation de la moyenne ordonnée pondérée pour l'optimisation équitable *Conférence ROADEF*, 2012.
- [4] Létocart L., Nagih A., Touati Moun gla N. Dantzig-Wolfe and Lagrangian decompositions in integer linear programming *International Journal of Mathematics in Operational Research*, Vol. 4 (3), pp. 247-262, 2012.
- [5] Przybylski A., Gandibleux X. Multi-objective branch and bound. *European Journal of Operational Research* 260:3(856-872), 2017.
- [6] VoptSolver project <https://github.com/vOptSolver>