Proposition de sujet de thèse

# Graphes d'Erdös-Rényi gelés

Encadrante : **Bénédicte Haas**, professeure au LAGA, haas@math.univ-paris13.fr
Domaine : **Mathématiques, Probabilités**
Date de début de la thèse : **Septembre 2022**

## Contexte et modèle étudié

Le graphe d'Erdös-Rényi est peut-être le plus connu des modèles de graphes aléatoires. Noté généralement $G(n, m)$ il consiste en un graphe aléatoire composé de $m$ arêtes uniformes placées entre les sommets $\{1, 2, ..., n\}$. La littérature sur le sujet est très vaste et beaucoup de ses propriétés géométriques sont maintenant bien connues. En particulier, au travers du couplage croissant en $m$, ce graphe aléatoire admet une transition de phase quand $m \approx \frac{n}{2}$ avec l'apparition d'une composante géante de taille comparable à $n$. La géométrie du graphe critique $G(n, n/2)$ a fait l'objet de travaux récents, reliés en particulier aux arbres aléatoires [1], au coalescent multiplicatif [2] et aux processus stochastiques en général.

Puisque particulièrement simple, le graphe d'Erdös-Rényi apparaît également dans de nombreux autres contextes, comme les arbres couvrants minimaux, les permutations aléatoires [6]. Récemment, une variante de ce modèle, appelée le graphe d'Erdös-Rényi gelé, a été introduit et étudié par Contat et Curien [3] en lien avec le modèle du parking sur des arbres aléatoires. Ce modèle, qu'on notera $F_p(n, m)$, dépend d'un paramètre additionnel $p \in [0, 1]$ et est décrit comme suit: Comme dans le graphe $G(n, m)$, des arêtes i.i.d. uniformes sont ajoutées entre deux sommets uniformes de $\{1, 2, ..., n\}$, mais à la différence du graphe d'Erdös-Rényi certaines arêtes ne sont pas ajoutées en fonction de la géométrie sous-jacente (voir figure ci-dessous):

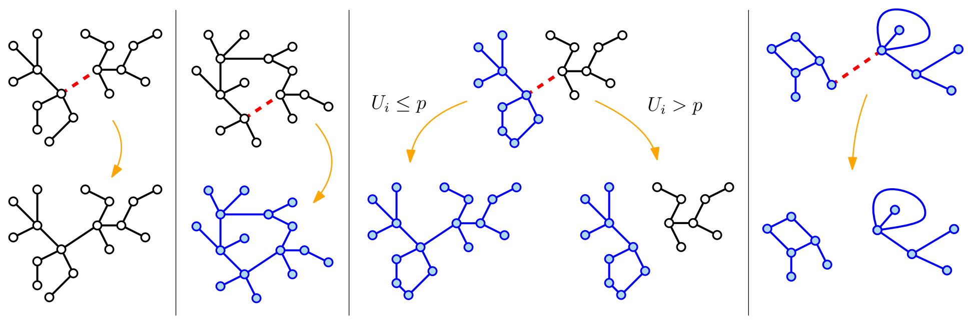


**Figure 1:** Illustration des transitions dans le graphe d'Erdös-Rényi gelé. Les composantes ayant du surplus sont "gelées" et coloriées en bleu.

- les arêtes qui relient deux sommets dont les composantes n'ont pas de cycle sont ajoutées
- si l'ajout d'une arête crée un cycle alors la composante en question est déclarée "gelée" et coloriée en bleue
- les arêtes qui connectent deux composantes gelées ne sont pas ajoutées, alors que les arêtes qui relient une composante gelée à une composante standard sont ajoutées avec probabilité $p$.

Lorsque $p = 1/2$, les tailles des composantes de ce modèle de graphe aléatoire ont la même loi que les tailles des composantes dans le modèle de parking sur des arbres aléatoires de Cayley [3]. Lorsque $p = 0$, il correspond à un modèle d'Erdös-Rényi où les composantes cessent de grossir lorsqu'elles forment un cycle. Il est montré dans [3] que la taille totale des composantes ayant un surplus forme une chaîne de Markov inhomogène en temps alors que la partie "arborescente" formée des composantes sans surplus forme une forêt aléatoire [4]. Cette propriété semble spécifique au modèle $F_p(n, m)$ et n'a pas encore été beaucoup exploitée.

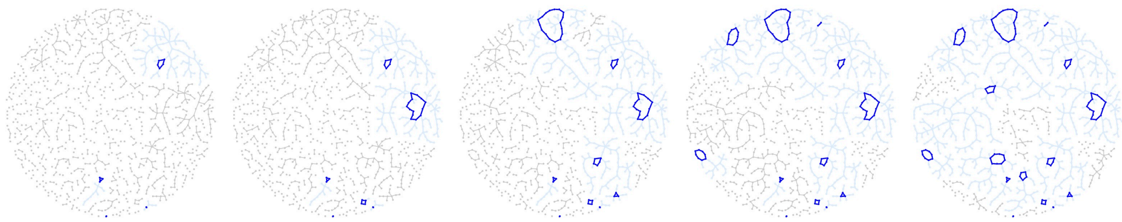

**Figure 2:** Illustration de l'évolution de $F_{1/2}(500, m)$ pour différentes valeurs de $m$. Les composantes gelées sont en bleu et les cycles sont en bleu foncé

## Objectifs de la thèse

L'objectif de cette thèse est d'étudier plus en détails la géométrie des composantes de $(F_p(n, m) : m \geq 0)$ lorsque $n$ est grand. En particulier :

1. Etablir une transition de phase pour la taille des composantes gelées à $m = \frac{n}{2}$ quand $p > 0$.
2. Etudier le phénomène de "self-organized criticality" dans le cas $p = 0$ où la mesure empirique de la partie arborescente devrait converger vers une loi stationnaire quand $m \gg \frac{n}{2}$. Un phénomène similaire a été étudié dans [5].
3. Etablir la convergence des tailles des composantes gelées au temps d'absorption (quand tous les noeuds sont gelés) et si possible décrire la loi limite (une partition aléatoire de 1).
4. Montrer une convergence géométrique des composantes critiques renormalisées par $n^{1/3}$ vers des versions d'arbres browniens possédant au plus un cycle, dans l'esprit de [1].

5. Etendre les résultats à d'autres modèles de graphes aléatoires "gelés" bassé sur le modèle de configuration par exemple.

## References


[1] L. Addario-Berry, N. Broutin, and C. Goldschmidt, *The continuum limit of critical random graphs*, Probab. Theory Related Fields, 152 (2012), pp. 367–406.

[2] D. Aldous, *Brownian excursions, critical random graphs and the multiplicative coalescent*, Ann. Probab., (1997), pp. 812–854.

[3] A. Contat and N. Curien, *Parking on Cayley trees & frozen Erdös-Rényi*, arXiv:2107.02116.

[4] J. Martin and D. Yeo, *Critical random forests*, Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics, 15 (2018).

[5] B. Ráth and B. Tóth, *Erdős-Rényi random graphs+ forest fires= self-organized criticality*, Electronic Journal of Probability, 14 (2009), pp. 1290–1327.

[6] O. Schramm, *Compositions of random transpositions*, Israel Journal of Mathematics, 147 (2005), pp. 221–243.