Sujet de thèse : **Singularités en temps fini pour des équations aux dérivées partielles intervenant dans l'étude de systèmes complexes**

Proposé par : Hatem ZAAG, LAGA, Université Sorbonne Paris Nord.

Selon Pierre Degond sur son site, un système est dit complexe lorsque la somme des mouvements individuels engendre l'émergence de structures macroscopiques, uniquement par interactions locales, sans qu'il y ait de leader. Les exemples classiques concernent les mouvements de bancs de poissons, d'oiseaux dans le ciel ou encore de mammifères en migration. C'est aussi le cas pour certains mouvements de foule, ou plus exotiquement de robots, termites et autres amibes, comme le *dictyostellium discoideum* (voir Corrias, Perthame et Zaag [3]).

L'objet de cette thèse est de construire des outils mathématiques pour comprendre certaines Équations aux Dérivées Partielles intervenant dans la modélisation de certains phénomènes complexes.

C'est le cas du système suivant proposé par Patlak dans [7], puis réintroduit par Keller et Segel dans [6], pour modéliser la *chémotaxie* :

$$\partial_t u = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v), \quad \Delta v + u = 0. \tag{1}$$

La chémotaxie, aussi appelée chimiotaxie ou chimiotactisme, est un phénomène au cours duquel des amibes, bactéries ou cellules bougent *individuellement* sous l'influence d'une substance chimique, donnant lieu à un mouvement *collectif* coordonnée. L'amibe *dictyostellium discoideum* est sans doute l'exemple le plus emblématique, où l'on assiste sous certaines conditions à l'agrégation de toutes les amibes en un seul point, donnant lieu à une *explosion en temps fini* de leur densité. Cette explosion se traduit mathématiquement par l'apparition d'une *singularité en temps fini* (voir Jäger et Luckhaus [5], Collot, Ghoul, Masmoudi et Nguyen [2]),

Dans cette thèse, on tentera de mieux décrire un tel phénomène pour le système (1). Si le cas de l'équation semilinéaire de la chaleur

$$\partial_t u = \Delta u + u^p, \quad p > 1, \tag{2}$$

est relativement bien compris (voir le livre de Quittner et Souplet [8]), c'est loin d'être le cas pour le système (1).

On essayera alors dans un premier temps de s'intéresser à l'équation suivante, de difficulté intermédiaire :

$$\partial_t u = \Delta u + u^p + \mu |\nabla u|^q, \quad p > 1, \quad q \geq 1, \quad \mu \in \mathbb{R} \tag{3}$$

qui constitute un modèle pour la dynamique de populations (voir Souplet [9]), très utile dans les systèmes complexes. Si plusieurs résultats partiels ont été obtenus pour les solutions explosives de cette équation (voir Chipot et Weissler [1], Souplet, Tayachi et Weissler [10], Tayachi et Zaag [11]), il n'existe toujours pas de classification systématique de tous les comportements à l'explosion pour (3). En cause le manque de structure de l'equation, qui n'admet ni énergie ni fonctionnelle de Lyapunov, contrairement à (1) et (2).

L'objectif de la thèse est double :
- Dans un premier temps, on tentera de mieux comprendre les différentes notions de *profil à l'explosion* pour (3), préalable à l'obtention d'une classification complète. Les techniques développées par Fermanian et Zaag dans [4] pour l'équation modèle (2) seront très utiles, quoi qu'insuffisantes.
- Dans une seconde partie, on s'intéressera à l'équation (1) et on essayera de constuire des solutions explosives dans un régime proche de celui de l'équation modèle (2).

Références

[1] M. Chipot and F. B. Weissler. Some blowup results for a nonlinear parabolic equation with a gradient term. *SIAM J. Math. Anal.*, 20(4) :886–907, 1989.

[2] C. Collot, T.E. Ghoul, Masmoudi.T., and V.T. Nguyen. Refined description and stability for singular solutions of the 2d keller-segel system, 2019.

[3] L. Corrias, B. Perthame, and H. Zaag. Global solutions of some chemotaxis and angiogenesis systems in high space dimensions. *Milan J. Math.*, 72 :1–28, 2004.

[4] C. Fermanian Kammerer and H. Zaag. Boundedness up to blow-up of the difference between two solutions to a semilinear heat equation. *Nonlinearity*, 13(4) :1189–1216, 2000.

[5] W. Jäger and S. Luckhaus. On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 329(2) :819–824, 1992.

[6] E. F. Keller and L. A. Segel. Model for chemotaxis. *J. Theor. Biol.*, 30 :225–234, 1971.

[7] C. S. Patlak. Random walk with persistence and external bias. *Bull. of Math. Biophys.*, 15 :311–338, 1953.

[8] P. Quittner and P. Souplet. *Superlinear parabolic problems.* Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007. Blow-up, global existence and steady states.

[9] P. Souplet. Finite time blow-up for a non-linear parabolic equation with a gradient term and applications. *Math. Methods Appl. Sci.*, 19(16) :1317–1333, 1996.

[10] P. Souplet, S. Tayachi, and F. B. Weissler. Exact self-similar blow-up of solutions of a semilinear parabolic equation with a nonlinear gradient term. *Indiana Univ. Math. J.*, 45(3) :655–682, 1996.

[11] S. Tayachi and H. Zaag. Existence of a stable blow-up profile for the nonlinear heat equation with a critical power nonlinear gradient term. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 371(8) :5899–5972, 2019.