Philippe Souplet
Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR CNRS 7539
Université Sorbonne Paris Nord
http ://www.math.univ-paris13.fr/˜souplet/

Avril 2023

PROPOSITION DE SUJET DE THESE

Comportement à l'explosion et propriétés de type Liouville pour des équations paraboliques non linéaires

1. Comportement à l'explosion pour des équations du type chaleur non linéaire.

Considérons l'équation de la chaleur non linéaire avec non-linéarité puissance

$$u_t - \Delta u = u^p \tag{1}$$

(avec $p > 1$), ou exponentielle

$$u_t - \Delta u = e^u \tag{2}$$

qui admettent des solutions explosant en temps fini. Pour ces deux équations, sous des hypothèses convenables sur p et/ou sur la dimension d'espace, les profils finaux d'explosion et les profils intermédiaires en temps-espace ont été classifiés dans des travaux importants de la période 1990-2000, notamment ceux de Herrero-Velázquez, de Bressan et de Merle-Zaag (voir [QS, Chapitre 25] et les références citées). Les preuves de ces résultats, basées sur les variables auto-similaires et sur des idées de la théorie de la variété centrale, sont longues et techniques. Par ailleurs, dans le cas particulier des solutions radiales décroissantes, des estimations supérieures optimales temps-espace sous forme globale (qui contiennent en particulier la partie supérieure de ces estimations de profils), ont été obtenues dans [S1, S2] par une méthode plus simple, basée sur le principe maximum, et qui est un raffinement de la méthode classique de [FM]. Pour le système de Keller-Segel parabolique-elliptique, qui est un des modèles mathématiques les plus classiques pour les phénomènes de concentration par chimiotaxie en biologie cellulaire, une technique de ce type a permis également d'obtenir dans [SW] le profil de concentration radial en dimension $n \geq 3$ (fondamentalement différent du profil précédemment établi en dimension 2).

Dans le cadre de cette thèse, on voudrait étudier les possibilités d'application de la méthode de [S1, SW, S2] à d'autres types d'équations de la forme

$$u_t - \Delta u = f(u), \quad u_t - \Delta u = u^p + F(|x|, u, |\nabla u|) \quad \text{ou} \quad u_t - \Delta u = e^u + F(|x|, u, |\nabla u|),$$

où f est une non-linéarité pouvant avoir un comportement asymptotique éloigné de celui d'une fonction puissance ou exponentielle, et F est un terme de perturbation. D'autres aspects de problèmes de ce type ont été étudiés par exemple dans [GNZ, TZ, HZ, Z3].

D'autre part, dans le cas de (1), toujours pour les solutions explosives à décroissance radiale, l'estimation globale *inférieure* temps-espace optimale a également été obtenue dans [S1] par une approche simplifiée. On cherchera si possible à étendre cette approche au cas de (2).

2. Propriétés de type Liouville pour l'équation de Hamilton-Jacobi diffusive.

Considérons l'équation de Hamilton-Jacobi diffusive

$$u_t - \Delta u = |\nabla u|^p, \quad (t, x) \in D \tag{3}$$

(avec $p > 1$), et sa version stationnaire

$$(4) \qquad -\Delta u = |\nabla u|^p, \quad x \in D,$$

qui jouent un rôle important en contrôle stochastique (voir par exemple [BD]). Un théorème de classification de type Liouville a été obtenu dans [SZ] pour (3) avec $D = (-\infty) \times \mathbb{R}^n$, qui montre que toute solution qui ne croît pas trop vite à l'infini doit être constante. Pour (4) avec D le demi-espace $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_n > 0\}$ et conditions de Dirichlet sur le bord, le résultat de type Liouville de [FPS] montre quant à lui que toute les solution sont unidimensionnelles (i.e., ne dépendent que la variable x_n). Ce dernier résultat a des applications intéressantes pour l'étude du comportement à l'explosion, ainsi que pour le problème elliptique en domaine borné.

Dans le cadre de cette thèse, dans le prolongement des résultats ci-dessus, on voudrait étudier les deux questions naturelles suivantes :
- toute solution de (3) dans $D = (-\infty) \times \mathbb{R}^n_+$ avec conditions de Dirichlet sur le bord est-elle nécessairement *unidimensionnelle* ? (modulo une éventuelle condition à l'infini)
- toute solution de (3) dans $D = (-\infty) \times \mathbb{R}_+$ avec conditions de Dirichlet sur le bord est-elle nécessairement *stationnaire* ?

REFERENCES

[BD] G. Barles, F. Da Lio, *On the generalized Dirichlet problem for viscous Hamilton-Jacobi equations*, J. Math. Pures Appl. (9), 83 (2004), 53-75.

[FPS] R. Filippucci, P. Pucci, Ph. Souplet, *A Liouville-type theorem in a half-space and its applications to the gradient blow-up behavior for superquadratic diffusive Hamilton-Jacobi equations*, Commun. Partial Differ. Equations 45 (2020) 321-349 [preprint ArXiV 1906.05161]

[FM] A. Friedman, B. McLeod, *Blow-up of solutions of semilinear heat equations*, Indiana Univ. Math. J. 34 (1985), 425-447.

[GNZ] T.-E. Ghoul, V.T. Nguyen, H. Zaag, *Blowup solutions for a nonlinear heat equation involving a critical power nonlinear gradient term*, J. Differential Equations 263 (2017), 4517-4564.

[HZ] M.A. Hamza, H. Zaag, *The blow-up rate for a non-scaling invariant semilinear heat equation*, Arch. Rat. Mech. Anal. 244 (2022), 87-125.

[QS] P. Quittner, Ph. Souplet, Superlinear parabolic problems. Blow-up, global existence and steady states. Second Edition. Birkhuser Advanced Texts, 2019, 725 p.+xxii. ISBN: 978-3-030-18220-5.

[S1] Ph. Souplet, *A simplified approach to the refined blowup behavior for the nonlinear heat equation*, SIAM J. Math. Analysis 51 (2019), 991-1013 [preprint Hal-01721261 (2018)].

[S2] Ph. Souplet, *On refined blowup estimates for the exponential reaction-diffusion equation*, Partial Diff. Eq. and Appl.(2022) 3:16 [preprint ArXiV 2110.08026].

[S3] Ph. Souplet, *Universal estimates and Liouville theorems for superlinear problems without scale invariance*, Discrete Contin. Dynam. Systems, Series A (2022), 33p., doi.org/10.3934/dcds.2022099 [preprint ArXiV 2202.02955].

[SW] Ph. Souplet, M. Winkler, *Blow-up profiles for the parabolic-elliptic Keller-Segel system in dimensions $n \geq 3$*, Comm. Math. Phys. 367 (2019), 665-681 [preprint ArXiV 1802.03093].

[SZ] Ph. Souplet, Q.S. Zhang, *Global solutions of viscous Hamilton-Jacobi equations*, Journal d'Analyse Math. 99 (2006) 355-396.

[TZ] S. Tayachi, H. Zaag, *Existence of a stable blow-up profile for the nonlinear heat equation with a critical power nonlinear gradient term*, Trans. Amer. Math. Soc. 371 (2019), 5899-5972.