

Représentations des petites catégories semi-additives en l'absence de foncteurs polynomiaux non constants

Sujet de thèse proposé par Aurélien Djament*

Mars 2023

Une catégorie *semi-additive* est une catégorie possédant des coproduits finis et des produits finis qui coïncident : les ensembles de morphismes sont ainsi munis d'une structure de monoïde commutatif naturelle ; des exemples typiques de catégories semi-additives non additives sont la catégorie des monoïdes commutatifs et la catégorie des correspondances (dont les objets sont les ensembles et les morphismes les correspondances).

Les foncteurs depuis une petite catégorie additive vers une catégorie des modules (le plus souvent, les groupes abéliens ou une catégorie d'espaces vectoriels) ont largement montré leur intérêt en topologie algébrique ou en théorie des représentations, notamment à travers la notion fondamentale de *foncteur polynomial* introduite par Eilenberg et Maclane au début des années 1950. En l'absence de foncteur polynomial non constant (situation « antipolynomial »), les foncteurs sur une catégorie additive se comportent de façon très différente et ont été très peu étudié jusqu'à une date récente ; après un premier résultat spectaculaire dans le cas d'une source égale à la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps fini publié par N. Kuhn en 2015 [4], T. Gaujal a obtenu tout récemment [2] des résultats de structure généraux sur les foncteurs antipolynomiaux (sur une source additive).

Sur une source semi-additive \mathcal{A} , les foncteurs polynomiaux se ramènent essentiellement à des foncteurs polynomiaux sur une catégorie additive universelle associée à \mathcal{A} par complétion en groupe. Il n'en est pas de même pour les foncteurs antipolynomiaux. Les foncteurs de *correspondances*, c'est-à-dire les foncteurs depuis la catégorie des correspondances sur les ensembles finis vers une catégorie de modules, ont toutefois fait l'objet de nombreuses recherches récentes, par S. Bouc et J. Thévenaz notamment (cf. par exemple [1]). Elles ont été étendues à des catégories de correspondances généralisées par C. Guillaume [3].

Nous proposons dans cette thèse d'étudier la catégorie des foncteurs depuis une catégorie semi-additive essentiellement petite \mathcal{A} vers les k -espaces vectoriels, où k est un corps commutatif quelconque, lorsqu'elle ne possède pas de foncteur polynomial non constant (ce qui est le cas pour les catégories de correspondances généralisées). Nous chercherons ainsi à généraliser à la fois les résultats de Gaujal et ceux de Bouc-Thévenaz et Guillaume, notamment en étendant des outils introduits par Gaujal (à la suite de R. Nagpal), à savoir des foncteurs de décalage et de différence « modifiés » en un sens inspiré de la restriction parabolique en théorie des représentations des groupes linéaires. En particulier, nous espérons obtenir une description des foncteurs simples à partir des représentations irréductibles de groupes finis, et montrer que la catégorie de foncteurs antipolynomiaux considérés est localement finie lorsque la catégorie des foncteurs additifs depuis la même source vers les groupes abéliens est elle-même localement finie. La description de certains groupes d'extensions entre foncteurs antipolynomiaux est également attendue.

*CNRS, LAGA (UMR7539), djament@math.cnrs.fr, <https://djament.perso.math.cnrs.fr/>.

Références

- [1] Serge BOUC et Jacques THÉVENAZ. *Correspondence functors and lattices*. J. Algebra 518, p. 453-518 (2019).
- [2] Thomas GAUJAL. *Étude des représentations génériques des groupes linéaires en inégale caractéristique*. Thèse de doctorat, université de Lille (2022).
- [3] Clément GUILLAUME. *Generalized correspondence functors*. J. Algebra 521, p. 405-451 (2019).
- [4] Nicholas J. KUHN. *Generic representation theory of finite fields in non-describing characteristic*. Adv. Math. 272, p. 598-610 (2015).