Sujet de thèse

SUR L'HOMOLOGIE CYCLIQUE TOPOLOGIQUE DES SPECTRES DE K-THÉORIE

Unité de recherche :	LAGA (UMR 7539)
Discipline – Domaine :	Mathématiques – Topologie algébrique
Direction de thèse :	Christian Ausoni – ausoni@univ-paris13.fr

Contexte

Ce projet se situe en topologie algébrique, à l'interface de *la théorie de l'homotopie chromatique*, c'est-à-dire l'étude des phénomènes de périodicité des groupes d'homotopie stables [Rav92], et de la K-théorie algébrique, qui est le réceptacle d'invariants des anneaux et de leur arithmétique.

L'homotopie chromatique vise à comprendre la structure globale des groupes d'homotopie stables des sphères ou des complexes finis ; approximativement, pour $k, n \in \mathbb{N}$, il s'agit de classifier, à homotopie près, les applications entre sphères $S^{n+k} \longrightarrow S^n$, problème indépendant du choix de n lorsque $n > k + 1$ (phénomène de stabilité donnant son nom à la théorie de *l'homotopie stable*). Ces applications forment un groupe abélien dénoté π_k, fini si $k \geqslant 1$, dont la collection forme un anneau gradué π_* dont on cherche à déterminer la structure globale, d'une extrême complexité. Après localisation en un premier p, il a été démontré que ses éléments font tous partie de familles périodiques, appelées familles v_n-périodiques pour $n \in \mathbb{N}$, que l'on peut étudier isolément ; dans la famille v_n-périodique, les classes se répètent à l'infini avec une période qui est un multiple de $2(p^n - 1)$. Les familles v_0 et v_1 périodique sont connues depuis plus de 40 ans, mais pour n supérieur les familles v_n sont encore mystérieuses, même si l'on en connait une partie.

Pour étudier ces familles périodiques, on fait appel à des théories de cohomologie multiplicatives, qui sont représentées en théorie de l'homotopie stable par des anneaux topologiques "stabilisés" appelés *spectres en anneau*. L'exemple fondamental est le spectre des sphères $\mathbb{S}$, qui joue le rôle d'objet initial parmi les spectres en anneau, comme $\mathbb{Z}$ pour les anneaux ordinaires. Le groupe π_k mentionné ci-dessus est le k-ème groupe d'homotopie de $\mathbb{S}$. Les théories de (co-)homologie peuvent être classifiées par leur complexité chromatique $n \in \mathbb{N}$, une notion étroitement liée à celle de hauteur $n \in \mathbb{N}$ d'une loi de groupe formel en caractéristique positive, et qui correspond aux types de v_n-périodicité des classes de π_* qu'elles détectent. Le spectre $\mathbb{S}$ est de complexité chromatique infinie, et $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire le spectre représentant la (co)-homologie ordinaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$, est de complexité chromatique 0. L'un des objectifs de la théorie de l'homotopie stable est de construire des théories de cohomologie multiplicatives interpolant entre $\mathbb{S}$ et $\mathbb{Z}$, de complexité finie et possédant de bonnes propriétés. Les spectres associés aux théories de cohomologie appelées *K-théories topologiques* sont de complexité 1.

La K-théorie algébrique est un invariant fondamental des anneaux, associant à un anneau R une suite de groupes $K_n(R)$ qui sont les groupes d'homotopie d'un spectre $K(R)$; celui-ci est un spectre en anneau commutatif si R est commutatif, et est donc équipé d'une application (unité) $\mathbb{S} \to K(R)$ qui s'avère aussi intéressante pour étudier $\mathbb{S}$, en établissant un lien entre l'homotopie stable et l'arithmétique. Les groupes de K-théorie algébrique sont notoirement difficiles à calculer, mais possèdent aussi des propriétés de périodicité très intéressantes. Il a été observé par exemple que le spectre en anneau $K_*(\mathbb{Z})$ est de complexité chromatique 1, et ses groupes d'homotopie sont formées de familles v_0 et v_1-périodique (uniquement), alors que $\mathbb{Z}$ est de complexité chromatique 0 : ce phénomène est appelé *décalage chromatique vers le rouge* (ou *redshift*) opéré par la K-théorie algébrique [AR08]. Il a été conjecturé que ce décalage est de 1 pour tous les spectres en anneau commutatifs. Durant les cinq dernières années, des avancées spectaculaires ont été réalisées dans ce domaine, et le caractère systématique du décalage chromatique opéré par la K-théorie algébrique a été établi en 2022 : Les *théorèmes d'annulation* [CMNN20] et *de pureté* [LMMT20] impliquent que le décalage est d'au plus un, et le *Chromatic Nullstellesatz* [BSY22] ainsi que des calculs pour les spectres de Lubin-Tate [Yua21] impliquent qu'il est d'au moins un. Il s'agit néanmoins de résultats structuraux qualitatifs qui n'abordent pas le calcul explicite des groupes de K-théorie algébrique.

L'utilité de cette approche associant l'homotopie chromatique et la K-théorie algébrique a aussi été soulignée de façon spectaculaire l'été dernier : la *conjecture du télescope* (Ravenel 1984), l'une des plus importantes conjectures en homotopie stable, a été infirmée par Burklund-Hahn-Levy-Schlank [BHL$^+$23] à l'aide d'un contre-exemple en K-théorie algébrique des spectres en anneau ; ceci révèle que la catégorie homotopique stable est bien plus complexe qu'anticipé. En particulier, le programme classique développé par Hopkins et Ravenel pour l'étudier, basé sur l'utilisation du cobordisme complexe, reste valable, mais s'avère n'en détecter qu'une partie.

Projet

Les travaux cités soulignent l'importance du rôle de la K-théorie algébrique comme outil d'étude des groupes d'homotopie stables des sphères. Dans cette perspective, il s'avère alors intéressant de calculer explicitement les groupes de K-théorie $K_n(A)$ d'un spectre en anneau commutatif A de petite complexité chromatique. Une méthode qui s'est avérée fructueuse est donnée par la trace cyclotomique trc, une application s'insérant dans une suite d'approximation successives

$$\mathbb{S} \longrightarrow K(A) \xrightarrow{trc} TC(A) \xrightarrow{\pi} THH(A)^{hS^1} \longrightarrow THH(A)$$

interpolant entre le spectre $\mathbb{S}$ et l'homologie de Hochschild $THH(A)$ de A, via sa K-théorie algébrique $K(A)$, son homologie cyclique topologique $TC(A)$ et les points fixes homotopiques $THH(A)^{hS^1}$ de $THH(A)$ pour l'action du cercle S^1. Par les travaux de Dundas-Goodwillie-McCarthy [DGM13], nous savons que trc est une équivalence à un terme d'erreur contrôlé près.

Dans les travaux [AR02, Aus10], des calculs explicites ont été réalisés dans le cas où A est le spectre représentant une variante de la K-théorie topologique, une théorie de cohomologie dont les classes représentent essentiellement des fibrés vectoriels. Toutefois, ce ne sont pas les groupes d'homotopie $K_*(A) := \mathbb{S}_*K(A)$ qui ont été évalués dans ces exemples, mais une approximation : les groupes d'homotopie à coefficients finis choisis. Il s'agit des groupes $\mathbb{S}/(p, v_1)_*K(\ell_p)$ et $\mathbb{S}/(p, v_1)K(ku_p)$, où ku_p est la K-théorie topologique complexe p-complétée, ℓ_p son facteur d'Adams, et $p \geqslant 5$ un premier.

L'objectif principal de ce projet est d'étendre le calcul de $\mathbb{S}/(p, v_1)K(ku_p)$ aux cas $p = 2, 3$, qui sont particulièrement intéressants en rapport avec des questions de détection de classes dans les groupes d'homotopie stables et de phénomènes particuliers à des petits premiers. Pour cela, il s'agit d'utiliser de nouveaux outils, qui n'étaient pas disponibles dans les travaux[AR02, Aus10] décrits ci-dessus.

Très récemment, Hahn, Raksit et Wilson [HW22, HRW22] ont étendu les notions de cohomologie prismatique et de cohomologie syntomique au cadre des spectres en anneau commutatifs, offrant un nouvel outil pour calculer l'homologie cyclique topologique. Plus précisément, sous certaines hypothèses sur A, ils ont défini une filtration motivique de $THH(A)$, compatible avec la structure cyclotomique. On peut en déduire une filtration $\mathrm{fil}^*_{\mathrm{mot}}TC(A)$ de l'homologie cyclique $TC(A)$, qui induit une suite spectrale

$$\mathbb{S}_*\mathrm{gr}^*_{\mathrm{mot}}TC(A) \Longrightarrow \mathbb{S}_*TC(A)\,,$$

où $\mathbb{S}_*\mathrm{gr}^*_{\mathrm{mot}}TC(A)$ est l'homologie syntomique de A. Cette suite spectrale s'avère être un outil prometteur, qui a été utilisé pour calculer $\mathbb{S}/(3, v_1)_*TC(\ell_p)$ dans [HRW22], ainsi qu'une approximation de $\mathbb{S}/(2, \eta, v_1)_*TC(ko_2)$ dans [AKAR23].

Une première partie du projet consistera à évaluer l'homologie syntomique de ku en tous les premiers, à coefficients finis $\mathbb{S}/(p, v_1)$, puis de compléter le calcul de $TC(ku)$, pour obtenir une nouvelle approche dans le cas $p \geqslant 5$, et un nouveau résultat pour $p = 3$. Le premier 2 pourra aussi être considéré, en reprenant les méthodes de [AKAR23], et, si le temps le permet, le cas de $K(ko)$ en des premiers impairs en se basant sur le cas de ku et un résultat de scindement [ABM23].

Références

[ABM23] Christian Ausoni, Haldun Özgür Bayındır, and Tasos Moulinos, *Adjunction of roots, algebraic K-theory and chromatic redshift* (2023), available at `arXiv.2211.16929`.

[AKAR23] Gabriel Angelini-Knoll, Christian Ausoni, and John Rognes, *Algebraic K-theory of real topological K-theory* (2023), available at `arXiv.2309.11463`.

[Aus10] Christian Ausoni, *On the algebraic K-theory of the complex K-theory spectrum*, Invent. Math. **180** (2010), no. 3, 611–668.

[AR02] Christian Ausoni and John Rognes, *Algebraic K-theory of topological K-theory*, Acta Math. **188** (2002), no. 1, 1–39.

[AR08] Christian Ausoni and John Rognes, *The chromatic red-shift in algebraic K-theory*, Enseign. Math. (2) **54** (2008), 9-11.

[BHL+23] Robert Burklund, Jeremy Hahn, Ishan Levy, Tomer M. Schlank, and Robert Burklund and Jeremy Hahn and Ishan Levy and Tomer M. Schlank, *K-theoretic counterexamples to Ravenel's telescope conjecture* (2023), available at `arXiv.2310.17459`.

[BSY22] Robert Burklund, Tomer M. Schlank, and Allen Yuan, *The Chromatic Nullstellensatz*, arXiv e-prints (July 2022), arXiv :2207.09929, available at `2207.09929`.

[CMNN20] Dustin Clausen, Akhil Mathew, Niko Naumann, and Justin Noel, *Descent and vanishing in chromatic algebraic K-theory via group actions*, arXiv e-prints (November 2020), arXiv :2011.08233, available at `2011.08233`.

[DGM13] Bjørn Ian Dundas, Thomas G. Goodwillie, and Randy McCarthy, *The local structure of algebraic K-theory*, Algebra and Applications, vol. 18, Springer-Verlag London, Ltd., London, 2013.

[HRW22] Jeremy Hahn, Arpon Raksit, and Dylan Wilson, *A motivic filtration on the topological cyclic homology of commutative ring spectra*, arXiv e-prints (June 2022), arXiv :2206.11208, available at `2206.11208`.

[HW22] Jeremy Hahn and Dylan Wilson, *Redshift and multiplication for truncated Brown-Peterson spectra*, Ann. Math. (2) **196** (2022), no. 3, 1277–1351 (English).

[LMMT20] Markus Land, Akhil Mathew, Lennart Meier, and Georg Tamme, *Purity in chromatically localized algebraic K-theory*, arXiv e-prints (January 2020), arXiv :2001.10425, available at `2001.10425`.

[Rav92] D. C. Ravenel, *Nilpotence and periodicity in stable homotopy theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 128, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992. Appendix C by Jeff Smith.

[Yua21] Allen Yuan, *Examples of chromatic redshift in algebraic K-theory*, arXiv e-prints (November 2021), arXiv :2111.10837, available at `2111.10837`.