TYPE D'HOMOTOPIE MODÉRÉ DES ESPACES DE CONFIGURATIONS

Ce projet de thèse est dans le domaine de la théorie de l'homotopie appliquée à des questions de topologie différentielle. Plus spécifiquement, on s'intéresse à construire des modèles algébriques des espaces de configurations de certaines variétés différentiables poursuivant les travaux de Kontsevich, Kriz, Lambrechts-Stanley, Idrissi, Campos-Willwacher (voir [Kon03, Kri94, LS04, Idr19, CW23]). Le but est d'appliquer ce travail à l'étude du type d'homotopie de certains espaces de plongements.

1. Espaces et catégories de configurations

Étant donné un espace topologique (le plus souvent une variété) X, son n-ième espace de configurations est le complémentaire des diagonales dans X^n :

$$\mathrm{Conf}_n(X) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n, x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}.$$

Cette collection d'espaces pour n parcourant l'ensemble des entiers est muni d'une structure algébrique riche. D'une part, on dispose d'applications d'oubli d'un point

$$\mathrm{Conf}_n(X) \to \mathrm{Conf}_{n-1}(X).$$

Dans l'autre sens, on dispose d'applications de création de points. En effet, si X est une variété différentiable, on peut remplacer un point d'une configuration par une configuration de plusieurs points dans un petit disque D autour de ce point ce qui donne une application

$$\mathrm{Conf}_k(X) \times \mathrm{Conf}_\ell(D) \to \mathrm{Conf}_{k+\ell-1}(X).$$

La collection de tous les espaces de configurations munie de ces deux types d'applications est un objet appelé "la catégorie de configurations de X" qu'on notera simplement $\mathrm{Conf}(X)$. Cet objet a été introduit dans [BdBW18] et joue un rôle fondamental dans l'étude des espaces de plongements et des espaces de difféomorphismes entre variété. Une conjecture fondamentale en théorie de l'homotopie est la suivante :

Conjecture 1.1. *Le type d'homotopie de* $\mathrm{Conf}(X)$ *dépend uniquement du type d'homotopie de* X *pour les variétés fermées simplement connexes.*

Un résultat récent obtenu indépendamment par Idrissi et Campos-Willwacher (voir [Idr19, CW23]) prouve cette conjecture pour le type d'homotopie rationnel (au sens de la théorie de l'homotopie rationnelle, voir section 3).

2. Calcul des plongements

La catégorie des configuration joue un rôle important dans la compréhension des espaces de plongements entre variétés différentiables. Étant donné deux variétés différentiables, X et Y, un plongement de X vers Y induit une application continue $\mathrm{Conf}_n(X) \to \mathrm{Conf}_n(Y)$ pour tout n. Ces applications sont compatibles avec les opérations d'oubli et de création de points et induisent une application continue

$$\mathrm{Emb}(X, Y) \to \mathrm{map}(\mathrm{Conf}(X), \mathrm{Conf}(Y)) \tag{1}$$

Le but de cette application est l'espace des applications entre les catégories de configuration de X et Y. Cette application est une bonne approximation sous des hypothèses de codimension grâce au théorème suivant.

Theorem 2.1 (Goodwillie-Klein [GK15], Boavida-Weiss [BdBW18])**.** *Le fibre homotopique de cette application est un faisceau homotopique explicite en la variable X si la différence* $\dim(Y) - \dim(X)$ *est supérieure ou égale à* 3*.*

3. Théorie de l'homotopie rationelle et modérée

Rappelons rapidement la théorie de l'homotopie rationnelle suivant les travaux fondateurs de Sullivan (voir [Sul77]). On dit qu'une application continue $f : X \to Y$ entre espaces simplement connexes est une équivalence d'homotopie rationnelle si le noyau et le conoyau de

$$\pi_i(f) : \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$$

pour tout $i \geqslant 2$, sont des groupes abéliens de torsion. Étant donné un espace simplement connexe X, on peut lui associer une algèbre commutative différentielle graduée sur $\mathbb{Q}$, $\Omega^*_{PL}(X)$ qui capture toute l'information sur le type d'homotopie rationnel de X. En particulier, les groupes d'homologie et d'homotopie rationalisés (c'est à dire leur produit tensoriel avec $\mathbb{Q}$) peuvent se déduire de $\Omega^*_{PL}(X)$ mais également toute la structure supplémentaire que ces groupes supportent comme les produits de Massey ou les crochets de Whitehead. Contrairement à la théorie de l'homotopie classique des espaces cette théorie est particulièrement calculable grâce à la théorie des modèles minimaux.

Les groupes d'homotopies non rationalisés sont notoirement beaucoup plus difficiles à calculer. Il existe cependant une théorie intermédiaire entre la théorie de l'homotopie rationnelle et la théorie de l'homotopie usuelle appelée théorie de l'homotopie modérée. Pour r un entier supérieur à 2, une application $X \to Y$ entre espaces $(r-1)$-connexes est dite une équivalence d'homotopie modérée si le noyau et le conoyau de l'application

$$\pi_{k+r}(X) \to \pi_{k+r}(Y)$$

pour tout k n'a pas de p-torsion pour des nombres premiers p tels que $2p - 3 \geqslant k$. La catégorie d'homotopie modérée est ce qu'on obtient quand on inverse les équivalences d'homotopie modérée. Des travaux de Dwyer, Scheerer et autres ont montrés qu'une grande partie de la théorie de l'homotopie rationnelle s'étend au cadre modéré (voir en particulier [Dwy79, Sch86]).

4. Le type d'homotopie modéré des catégories de configurations

Le but de ce projet de thèse est de comprendre le type d'homotopie modéré de certaines catégories de configurations. Le cas le plus fondamental à étudier est celui de la catégorie de configuration de $\mathbb{R}^n$. La donnéé de cette catégorie de configuration est essentiellement la même donnée homotopique que l'opérade des petits disques. Dans ce cas, on conjecture que le type d'homotopie modéré est formel (au sens où l'algèbre commutative différentielle graduée sur les entiers qui lui est associée est formelle). Ce résultat est déjà hautement non trivial dans le cas de l'homotopie rationnelle et a été montré par Kontsevich et Lambrechts-Volić (voir [LV14]) en utilisant une technique appelée aujourd'hui "intégrale de Kontsevich". Nous conjecturons que cette formalité modérée pourra se montrer grâce à l'action du groupe de Grothendieck-Teichmüller sur cette opérade construite par Boavida de Brito et Horel (voir [BdBH21]).

On peut ensuite s'intéresser à la catégorie de configuration d'autres variétés différentiables. En général, on ne s'attend pas à ce qu'elle soit formelle car ce n'est déjà pas le cas pour le type d'homotopie rationnel. On conjecture qu'une variante du modèle explicite de Lambrechts-Stanley [LS04] sera valable également dans le cas modéré. Cette question semble difficile d'accès en général car la preuve dans le cadre rationnel passe par l'utilisation des formes différentielles et semble délicate à généraliser au cas modéré. Cependant, il existe une autre stratégie pour les variétés algébriques. Dans ce cas, on peut utiliser le fait que le type d'homotopie des catégories de configurations est naturellement muni d'une action Galoisienne. Cette action peut être exploitée pour prouver des résultats de E_1-formalité au sens de [CG14] (c'est-à-dire, le fait que la page E_1 de la suite spectrale des poids est un modèle du type d'homotopie).

5. Applications aux espaces de plongements

Ces résultats sur le type d'homotopie modérés des catégories de configurations auront des applications au type d'homotopie des espaces de plongements par l'intermédiaire du calcul des plongements expliqué plus haut. Le cas de $\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^n)$ est déjà très intéressant et dans ce cas, on conjecture que le modèle en termes de complexes de graphes de Fresse-Turchin-Willwacher pour les plongements de certaines variétés dans $\mathbb{R}^n$ sera encore valide pour le type d'homotopie modéré (voir [FTW20]). Un autre application potentielle est la compréhension du type d'homotopie modéré des espaces de noeuds dans des variétés de la forme $\Sigma \times \mathbb{R}$ avec Σ une surface. Dans ce cas, comme on l'a dit, le calcul des plongement ne calcule pas le type d'homotopie de l'espace des plongements mais en procure une approximation intéressante très reliée à la théorie des invariants de Vassiliev.

References

[BdBH21] Pedro Boavida de Brito and Geoffroy Horel, *On the formality of the little disks operad in positive characteristic*, Journal of the London Mathematical Society **104** (2021), no. 2, 634–667.

[BdBW18] Pedro Boavida de Brito and Michael Weiss, *Spaces of smooth embeddings and configuration categories*, Journal of Topology **11** (2018), no. 1, 65–143.

[CG14] Joana Cirici and Francisco Guillén, *E1–formality of complex algebraic varieties*, Algebraic & Geometric Topology **14** (2014), no. 5, 3049–3079.

[CW23] Ricardo Campos and Thomas Willwacher, *A model for configuration spaces of points*, Algebraic & Geometric Topology **23** (2023), no. 5, 2029–2106.

[Dwy79] William Dwyer, *Tame homotopy theory*, Topology **18** (1979), no. 4, 321–338.

[FTW20] Benoit Fresse, Victor Turchin, and Thomas Willwacher, *On the rational homotopy type of embedding spaces of manifolds in R^n*, arXiv preprint arXiv:2008.08146 (2020).

[GK15] Thomas G Goodwillie and John R Klein, *Multiple disjunction for spaces of smooth embeddings*, Journal of Topology **8** (2015), no. 3, 651–674.

[Idr19] Najib Idrissi, *The Lambrechts–Stanley model of configuration spaces*, Inventiones mathematicae **216** (2019), no. 1, 1–68.

[Kon03] Maxim Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Letters in Mathematical Physics **66** (2003), 157–216.

[Kri94] Igor Kriz, *On the rational homotopy type of configuration spaces*, Annals of Mathematics **139** (1994), no. 2, 227–237.

[LS04] Pascal Lambrechts and Don Stanley, *The rational homotopy type of configuration spaces of two points*, Annales de l'institut Fourier, vol. 54, 2004, pp. 1029–1052.

[LV14] Pascal Lambrechts and Ismar Volić, *Formality of the little N-disks operad*, Mem. Am. Math. Soc., vol. 1079, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2014 (English).

[Sch86] H Scheerer, *Report on tame homotopy theory via differential forms*, Algebraic Topology Rational Homotopy: Proceedings of a Conference held in Louvain-la-Neuve, Belgium, May 2–6, 1986, Springer, 1986, pp. 192–207.

[Sul77] Dennis Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **47** (1977), 269–331.