Projet de thèse
Décompositions stables de modules de persistance multiparamétrique

Grégory Ginot, Vadim Lebovici

12 mai 2025

1 Contexte

Développée initialement pour l'analyse de données, la persistance topologique fournit des invariants des espaces topologiques filtrés via le calcul de leur homologie. Cette méthode produit des objets algébriques appelés *modules de persistance*, qui sont formellement des foncteurs de l'ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leq)$ dans la catégorie des espaces vectoriels. Un résultat central de la théorie assure que ces modules se décomposent en éléments simples associés à des intervalles. La collection des intervalles apparaissant dans une telle décomposition — le *code-barres de persistance* — décrit alors entièrement le module de persistance de départ et contient donc des informations fines sur la filtration topologique initiale. Le remarquable théorème d'isométrie [5] garantit que ces invariants sont stables : la distance naturelle (*d'entrelacement*) entre modules coïncide avec la distance combinatoire (*bottleneck*) entre leurs code-barres, assurant leur robustesse face au bruit sur les données. Ces codes-barres sont devenus des outils puissants dans des domaines variés, de la géométrie symplectique à la biologie [9].

Dans de nombreux scénarios pratiques, il est naturel de considérer des filtrations à plusieurs paramètres plutôt qu'un seul, créant ainsi un module de persistance *multiparamétrique*, c'est-à-dire indexé par $\mathbb{R}^n$ munit de l'ordre produit. Cela permet de contrecarrer la présence de données aberrantes en filtrant les données par rapport aux sous-niveaux d'une densité locale estimée, ou encore de traiter des données intrinsèquement multiparamétriques, comme les cellules sanguines munies de plusieurs biomarqueurs. Cependant, bien que les distances d'entrelacement et les décompositions en somme directe se généralisent au cadre multiparamétrique, le théorème d'isométrie ne subsite plus : les modules multiparamétriques ne sont pas décrits de façon stable par leurs indécomposables. Le défi de la multipersistance est donc de construire de nouveaux descripteurs stables de ces objets.

2 Projet de thèse

Un récent travail de H. Bjerkevik [3] apporte une solution partielle au défi de la persistance multiparamétrique, en introduisant des approximations algébriques et une nouvelle distance assurant une forme de stabilité des décompositions en indécomposables. Le travail de Bjerkevik ouvre plusieurs directions de recherche importantes, qui seront l'objet de la thèse. D'une part, de nombreuses questions directement liées aux outils de Bjerkevik sont laissées ouvertes par l'auteur. D'autre part, l'adaptation de ces idées à l'approche faisceautique de la persistance topologique reste entièrement à construire.

Coût bottleneck et distance bottleneck. Bjerkevik introduit une quantité réelle positive ou nulle associée à une paire de modules de persistance, que l'on appellera ici *coût bottleneck*. Ce coût est inspiré de la distance bottleneck et se comporte bien vis-à-vis des décompositions en somme directe. Bien que le coût bottleneck ne soit pas une distance en général, Bjerkevik montre que ce coût devient une distance lorsque les modules se décomposent en indécomposables fins, i.e., dont la dimension ponctuelle est au plus 1. De plus, il montre que cette distance coincide avec la distance bottleneck dans le cas uniparamétrique et pour les modules décomposables en segments finaux — i.e., des intervalles stables par addition du quadrant supérieur $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ de $\mathbb{R}^n$. En revanche, la comparaison du coût et de la distance bottleneck reste entièrement ouverte pour la classe des modules multiparamétriques décomposables en intervalles.

Répondre à cette question constituera le premier objectif de la thèse. Dans un premier temps, on commencera par étudier des classes de modules spécifiques qui sont d'intérêt en persistance : les modules décomposables en blocs ou en rectangles. Ces classes admettent des caractérisations algébriques [4, 8] qui fournissent des approches prometteuses pour l'étude du coût bottleneck.

Constantes de stabilité. Le résultat central de la théorie de Bjerkevik est que le coût bottleneck satisfait une propriété de stabilité : ce coût est majoré par la distance d'entrelacement entre les modules. Cependant, la constante multiplicative apparaissant dans la majoration dépend linéairement de la dimension maximale des espaces définissant les modules de persistance. Le coût bottleneck étant défini au niveau des décompositions des modules de persistance, il est raisonnable d'attendre que cette constante puisse être remplacée par la dimension maximale des indécomposables d'une décomposition en somme directe des modules.

Cette question est laissée en conjecture par Bjerkevik, et constituera le second objectif de la thèse. A nouveau, on commencera par étudier le cas spécifique des modules décomposables en blocs et en intervalles qui bénéficient d'une caractérisation algébrique.

Distance d'élagage. Dans son travail, Bjerkevik définit une notion d'*élagage* (*pruning*) de modules de persistance, agissant comme une décomposition approchée de tout un voisinage d'un module fixé (pour la distance d'entrelacement). Cette notion d'élagage permet à Bjerkevik d'introduire une distance définie à partir de décompositions approchées et qui devrait donc mieux se comporter vis-à-vis des décompositions en sommes directes que la distance bottleneck. Cependant, l'équivalence entre cette distance et la distance d'entrelacement est laissée en question ouverte par Bjerkevik.

Dans un troisième temps de la thèse, on étudiera cette conjecture pour laquelle rien n'est connu, en commençant à nouveau par des cas simples (modules décomposables en rectangles).

Approche faisceautique. La théorie de la persistance a été formulée dans le cadre de la théorie des faisceaux par Curry [6] puis étendue au cadre dérivé par Kashiwara et Schapira [7]. Cette approche particulièrement fructueuse permet l'utilisation des opérations topologiques riches provenant de la théorie des faisceaux, et a ainsi bénéficié à la persistance via l'introduction de nouveaux outils, comme les codes-barres projetés [2]. Réciproquement, les idées de la persistance ont inspirés des distances sur les faisceaux utilisées ensuite en géométrie, par exemple en symplectique [1].

Le projet central de la thèse sera de généraliser les idées de Bjerkevik au cadre faisceautique de la persistance. Les outils de Bjerkevik étant construits via des décompositions en somme directe, on commencera par étudier l'analogues des modules décomposables en intervalles dans le cadre faisceautique : les *faisceaux codes-barres* introduits par Kashiwara et Schapira [7]. L'objectif sera de fournir une formulation faisceautique des distances et des approximations *à la Bjerkevik* qui soit adaptée au cadre dérivé, et qui pourrait donc permettre d'étendre ces notions aux complexes de faisceaux codes-barres à support compact. Cette étape serait alors clé puisque Kashiwara et Schapira conjecturent que l'image essentielle de ces complexes est la catégorie dérivée des γ-faisceaux PL [7, Conj. 3.19], c'est-à-dire essentiellement tous les faisceaux associés aux modules de persistance stockables dans un ordinateur.

Références

[1] Tomohiro Asano and Yuichi Ike. Persistence-like distance on Tamarkin's category and symplectic displacement energy. *J. Symplectic Geom.*, 18(3) :613–649, 2020.

[2] Nicolas Berkouk and François Petit. Projected distances for multiparameter persistence modules, 2022. arXiv preprint : 2206.08818, à paraître dans *Annales de l'Institut Fourier*.

[3] Håvard Bakke Bjerkevik. Stabilizing decomposition of multiparameter persistence modules. *Foundations of Computational Mathematics*, pages 1–60, 2025.

[4] Magnus B. Botnan, Vadim Lebovici, and Steve Oudot. Local characterizations for decomposability of 2-parameter persistence modules. *Algebras and Representation Theory*, 26(6) :3003–3046, 2023.

[5] Frédéric Chazal, Vin de Silva, Marc Glisse, and Steve Oudot. *The structure and stability of persistence modules*. SpringerBriefs Math. Cham : Springer, 2016.

[6] Justin Michael Curry. *Sheaves, cosheaves and applications*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2014. Thesis (Ph.D.)–University of Pennsylvania.

[7] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. Persistent homology and microlocal sheaf theory. *J. Appl. Comput. Topol.*, 2(1-2) :83–113, 2018.

[8] Vadim Lebovici, Jan-Paul Lerch, and Steve Oudot. Local characterization of block-decomposability for multiparameter persistence modules. *accepté à Homology, Homotopy and Applications*, 2024.

[9] Steve Y Oudot. *Persistence theory : from quiver representations to data analysis*, volume 209. American Mathematical Soc., 2017.