UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS NORD

INSTITUT GALILÉE
99, Avenue Jean-Baptiste Clément
93430 Villetaneuse, France

Bruno VALLETTE

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications

vallette@math.univ-paris13.fr
www.math.univ-paris13.fr/∼vallette

Paris, 9 mai 2025

Proposition de sujet de thèse

THÉORIE HOMOTOPIQUE DES BIGÈBRES ET APPLICATIONS

Le thème de ce projet de thèse est l'étude homotopique des bigèbres associatives, c'est-à-dire des algèbres de Hopf sans antipode, avec deux applications à l'algèbre quantique et à la topologie algébrique respectivement.

Algèbre homotopie. L'algèbre et la théorie de l'homotopie ne sont pas compatibles *a priori*. Par exemple, en partant d'une algèbre associative différentielle graduée et en perturbant le complexe de chaînes sous-jacent, même en restant dans la même classe homotopique, on détruit l'associativité du produit binaire. Cela ne doit pas être perçu comme un defaut mais plutôt comme un avantage : le manque d'associativité est contrôlé fidèlement par une nouvelle opération à trois entrées. Cette procédure continue et donne lieu à une série infinie d'opérations cohérentes dont le nombre d'entrées est quatre, cinq, six ... Cette nouvelle notion d'algèbre homotopique supérieure, appelée « algèbre associative homotopique », a été découverte pour la première fois dans les années soixante par Jim Stasheff [Sta63]. Aujourd'hui, cette notion joue un rôle crucial dans de nombreux domaines tels que la topologie algébrique, la géométrie symplectique et la physique mathématique, par exemple. Le même phénomène apparaît de la même manière lorsque l'on considère d'autres types de structures algébriques différentielles graduées. Par exemple, la notion d'algèbre de Lie différentielle graduée admet une généralisation homotopique supérieure, qui est la structure essentielle de la démonstration par Maxim Kontsevich [Kon03] de la conjecture de quantification par déformation des variétés de Poisson (qui lui a valu la médaille Fields).

Opérades. On peut alors se demander comment définir des généralisations homotopiques cohérentes pour n'importe quelle structure algébrique, car cela ne peut pas être fait à la main à chaque fois. Dans les années 90, la notion d'opérade provenant de la topologie a été introduite dans le monde différentiel gradué et depuis lors, le calcul opéradique a été largement développé, notamment la puissante dualité de Koszul, voir [LV12]. Cette théorie est maintenant suffisamment complète pour nous fournir des outils conceptuels puissants permettant de définir des versions homotopiques pour de nombreuses structures algébriques ainsi que leurs propriétés algébro-homotopiques.

Bigèbres associatives. Néanmoins, une structure algébrique résiste encore aux efforts de la communauté : les bialgèbres différentielles graduées qui sont constituées d'un produit associatif et d'un coproduit coassociatif compatible, dit autrement une algèbre de Hopf différentielle graduée sans antipode. Il est assez paradoxal de voir que cette notion d'apparence simple et omniprésente en algèbre quantique et en topologie algébrique n'a pas encore reçu le traitement homotopique qu'elle mérite. Elle est certes codée conceptuellement par un objet opéradique appelé «propérade», mais ce dernier n'admet pas de présentation quadratique homogène et ne peut donc pas être traitée *stricto sensu* par la dualité de Koszul éponyme [Val07].

OBJECTIF 1: Décrire une notion de bigèbres associatives à homotopie près possédant toutes les propriétés requises. Même si le modèle minimal de la propérade des bigèbres associatives est un problème notoirement difficile qui n'a connu aucune réponse complète à ce jour, on peut cependant lui appliquer la construction bar-cobar fonctorielle pour les propérades établie dans [Val07]. Cela va donner lieu à une résolution assez grosse en taille mais qui doit pouvoir être rendue totalement explicite : la propérade codant les bigèbres est connue pour admettre une base explicite [EE05] et la résolution bar-cobar s'appuie sur des graphes dirigés simples. Le point saillant d'une telle résolution est qu'elle serait engendrée par une coproperade différentielle graduée (la construction bar) : ce point clé permet d'appliquer les développements les plus récents de la théorie de l'homotopie properadique établie dans [HLV21]. Au final, on obtiendrait là une théorie homotopique des bigèbres associatives aussi riche que celle des algèbres associatives qui a été largement utilisée dans la littérature au cours des 60 dernières années. Plus précisément, cela donnera une définition explicite de bigèbre associative à homotopie près avec une bonne notion d'∞-morphisme, une formule effective pour le théorème de transfert homotopique et une algèbre L_∞ qui code ses déformations.

OBJECTIF 2: Démontrer la formalité de bigèbre associative des chaînes sur l'espace des lacets de Moore d'un espace formel. Comme première application de cette nouvelle théorie homotopique des bigèbres, on doit pouvoir établir le résultat suivant de formalité en topologie algébrique. Soit X un espace topologique pointé et soit ΩX son espace de Moore de lacets. La concaténation des lacets le muni d'une structure de monoïde topologique, ce qui induit une structure de bigèbre associative différentielle graduée sur son complexe A des chaînes singulières (où le coproduit est donné par l'approximation de la diagonale d'Alexander–Whitney). On doit pouvoir montrer que si l'espace X est formel alors la bigèbre associative différentielle graduée A est formelle sur le corps des rationnels. La méthode qui doit permettre de mener à bien la démonstration consiste à utiliser les nouvelles classes fidèles de formalité de Kaledin–Emprin [Emp24].

OBJECTIF 3: Décrire le modèle minimal de la propérade des bigèbres. Le premier objectif de ce sujet de thèse n'a pas l'air de présenter d'obstacle infranchissable quitte à y passer un peu de temps et à décrire soigneusement les différentes objets en jeu. Une fois cette objectif résolu, on pourra alors s'intéresser à raffiner la résolution bar-cobar en s'attaquent au modèle minimal de la propérade des bigèbres associatives. On connait déjà la forme des générateurs (1 par arité) et on connait le premier terme de la différentielle (qui correspond à la différentielle du complexe de Gerstenhaber–Shack, voir [MV09, Section 3]). C'est le reste de la formule de la différentielle qui reste à trouver. Plusieurs résultats ont été trouvé depuis la publication de ce dernier article qui doivent pouvoir permettre de progresser efficacement dans cette direction : une formule explicite de l'approximation de la diagonale de l'associaèdre [MTTV21] et une nouvelle approche des modèles minimaux à plusieurs sorties [Her23].

OBJECTIF 4: Donner une formule universelle de déformation par quantification des bigèbres de Lie. La seconde application de cette nouvelle théorie homotopique des bigèbres revient à utiliser la forme explicite trouvée auparavant du modèle minimal de la propérades des bigèbres pour obtenir une formule universelle pour la quantification de la déformation des bialgèbres de Lie [MW20].

RÉFÉRENCES

[EE05] Benjamin Enriquez and Pavel Etingof, On the invertibility of quantization functors, J. Algebra **289** (2005), no. 2, 321–345. 2

[Emp24] Coline Emprin, Kaledin classes and formality criteria, arxiv.org/abs/2404.17529 (2024). 2

[Her23] Lander Hermans, A minimal model for prestacks via Koszul duality for box operads, arxiv.org/abs/2312.04185 (2023). 2

[HLV21] Eric Hoffbeck, Johan Leray, and Bruno Vallette, Properadic homotopical calculus, Int. Math. Res. Not. **2021** (2021), no. 5, 3866–3926. 2

[Kon03] Maxim Kontsevich, Deformation quantization of Poisson manifolds, Lett. Math. Phys. **66** (2003), no. 3, 157–216. 1

[LV12] Jean-Louis Loday and Bruno Vallette, Algebraic operads, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 346, Springer-Verlag, Berlin, 2012. 1

[MTTV21] Naruki Masuda, Hugh Thomas, Andy Tonks, and Bruno Vallette, The diagonal of the associahedra, J. Éc. Polytech., Math. **8** (2021), 121–146 (English). 2

[MV09] Sergei Merkulov and Bruno Vallette, Deformation theory of representations of prop(erad)s. II, J. Reine Angew. Math. **636** (2009), 123–174. 2

[MW20] Sergei Merkulov and Thomas Willwacher, Classification of universal formality maps for quantizations of Lie bialgebras, Compos. Math. **156** (2020), no. 10, 2111–2148. 2

[Sta63] James Dillon Stasheff, Homotopy associativity of H-spaces. I, II, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 275-292 ; ibid. **108** (1963), 293–312. 1

[Val07] Bruno Vallette, A Koszul duality for props, Trans. of Amer. Math. Soc. **359** (2007), 4865–4993. 1, 2