Contrat doctoral – ED Galilée

Titre du sujet : Propriétés des algèbres enveloppantes associées à des opérades générales

- Unité de recherche : LAGA UMR 7539
- Discipline : Mathématiques
- Direction de thèse : Éric Hoffbeck. Le sujet sera codirigé par Friedrich Wagemann à Nantes
- Contact : Université Sorbonne Paris Nord, 99, avenue Jean-Baptiste Clément,
- Villetaneuse, 93430, hoffbeck@math.univ-paris13.fr
- Domaine de recherche : topologie algébrique
- Mots clés : opérades, algèbre homologique

---

1 Motivation

Pour beaucoup de structures algébriques, on dispose de la notion d'algèbre enveloppante. Cette notion est à priori basée sur l'exigence que l'algèbre enveloppante soit associative unitaire et que ses modules à gauche soient exactement les modules correspondant à cette structure algébrique.
Pour les algèbres associatives, les algèbres de Lie et les algèbres associatives commutatives, on a un lien entre la cohomologie de l'algèbre et la cohomologie de son algèbre enveloppante.
En effet, soit A une K-algèbre associative. Alors son algèbre enveloppante est A ⊗ Aop , puisque les A-bimodules sont exactement les A⊗Aop -modules à gauche. La cohomologie de A ⊗ Aop s'obtient par une formule de type Künneth, et la cohomologie de A en est donc un facteur.
Pour les algèbres de Lie g, l'algèbre enveloppante U g est construite comme quotient de l'algèbre tensorielle T g par l'idéal bilatère engendré par les [x, y] − x⊗y+y⊗x pour tous x, y ∈ g. Le lien en cohomologie est le théorème qui affirme que cohomologie de Chevalley-Eilenberg de g et cohomologie de Hochschild de son enveloppante sont liées par la formule
H_* (g, M ad) = HH_• (U g, M) pour un U g-bimodule M (et son g-module adjoint M ad associé).
Pour les algèbres associatives commutatives A, l'enveloppante est l'algèbre A elle-même. Ici, on a une décomposition (dite de Hodge) de la cohomologie de Hochschild de A en une partie donnée par les différentielles de Kähler et un reste (qui est nul si A est lisse).
Un aspect de ce sujet de thèse est que nous aimerions capter les similitudes entre ces trois situations.

2 Description du sujet

Nous nous plaçons dans le cadre des algèbres sur une opérade O. Évidemment, les cas O = As, l'opérade des algèbres associatives, O = Lie, l'opérade des algèbres de Lie ou O = Com, l'opérade des algèbres commutatives, sont les cas particuliers qui ont motivé ce sujet.

1 Étant donnée une O-algèbre A, son algèbre enveloppante U A est par définition (voir [2], Chapter 12.3) le A-module libre A ⊗O K sur le A-module trivial K. Il s'agit bien d'une algèbre associative unitaire.

La philosophie de ce sujet de thèse est d'essayer d'établir le plus de liens possibles entre les propriétés de O et celles de U A (pour une O-algèbre A quelconque). Les propriétés qui nous intéressent sont d'une part issues de la Théorie des représentations. Par exemple, sous quelles conditions générales sur O, U A est-elle une bigèbre, une algèbre de Hopf, une algèbre de Hopf tressée etc ? Ces questions semblent difficiles et plus loin dans les développements.

D'une autre part, les questions peuvent être d'ordre homologiques, i.e. établir un lien entre les cohomologies de A et de U A, de O et de U A, ou lire sur l'opérade O des propriétés que la cohomologie de Hochschild U A puisse avoir, comme par exemple la propriété d'admettre une décomposition de Hodge.

Comme ce cercle d'idées semble aussi assez difficile, il est important d'ancrer le sujet dans une démarche concrète. Le premier point d'établir un lien explicite et algorithmique entre une présentation quadratique par générateurs et relations d'une opérade binaire quadratique O et une présentation quadratique-linéaire de l'algèbre enveloppante correspondante U A. Plus précisément, soit A une algèbre sur l'opérade binaire quadratique O. La notion de A-module sur un K-espace vectoriel M peut s'obtenir en prenant pour tout générateur o (qui n'a pas de symétrie) de O une opération à gauche λo et une à droite ρo de A sur M telles que les relations que o doit vérifier donnent les relations pour λo et ρo . Ces relations sont celles que l'on obtient en insérant un élément de M et les (deux) autres de A (M est alors un A-module au sens de Beck). Pour un générateur o avec symétries, il suffit de considérer une opération à gauche uniquement. Plus tard, on pourra réfléchir comment généraliser cette démarche à une opérade quadratique quelconque.

L'algèbre enveloppante U A est l'algèbre associative dont les modules à gauche doivent être les A-modules M . Il faut donc prendre l'algèbre associative libre (i.e. l'algèbre tensorielle) en les λo et les ρo pour tout générateur binaire o de O et diviser par les relations. Ainsi, on voit bien le lien entre les présentations de O et de U A.

Dans une seconde étape, cette présentation doit nous servir pour calculer la cohomologie de Hochschild de U A. À cause du lien entre les deux présentations, nous supposons que la cohomologie de Hochschild de U A et des cohomologies associées à l'opérade O sont liées. Par exemple, on aimerait établir un lien entre HH • (U A) et la cohomologie opéradique (voir Chapitre 12.4 dans [2]) de A. Ce genre de lien devrait impliquer, par exemple, un lien entre le fait que l'opérade O est de Koszul et la Koszulité de U A comme algèbre quadratique-linéaire (voir [2], Chapitre 3).

Ces questions sont liées à la question si la cohomologie opéradique de A comme O-algèbre est un foncteur Ext au-dessus de U A. Ce n'est pas toujours le cas et les obstructions sont décrites par Joan Millès dans [3]. Puisque Millès utilise des résolutions construites à partir de la Théorie de dualité de Koszul, nous pensons que le lien établi plus haut peut porter un nouvel éclairage sur la démarche dans [3].

Objectifs à court terme

(a) Établir le lien entre les présentations de O et de U A pour une opérade binaire quadratique O.
(b) Étudier les liens connus entre la cohomologie de Hochschild de U A et la cohomologie opéradique de A pour O ∈ {As, Lie, Com} en cherchant leurs similitudes.
(c) Étendre le champs des similitudes trouvées dans (b) à O = Leib: étudier les constructions de Loday-Pirashvili dans [1] sous un point de vue opéradique général. Par exemple, essayer de généraliser la résolution donnée dans ce papier et réfléchir quelle cohomologie on peut calculer à l'aide de celle-ci.
(d) Étudier en détail le cas où l'opérade O est donnée par un générateur (sans symétrie) et une relation de type "parenthésage à gauche devient une somme de parenthésages à droite".
(e) Établir un lien entre la Koszulité de l'opérade quadratique binaire O et la Koszulité de l'algèbre quadratique-linéaire U A. Comparer ces propriétés à celle d'admettre une base de PBW (pour O et U A).

References

[1] Loday, Jean-Louis; Pirashvili, Teimuraz Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology Math. Ann. 296 (1993), no. 1, 139–158.
[2] Loday, Jean-Louis; Vallette, Bruno Algebraic operads, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 346. Springer, Heidelberg, 2012
[3] Millès, Joan André-Quillen cohomology of algebras over an operad Adv. Math. 226 (2011), no. 6, 5120–5164.