Projet de Thèse: Fonction L-p-adique adjointe tordue et relations entières de périodes pour GL_3

D. Disegni, J. Tilouine

28 mars 2025

Soit $\varphi\colon {}^L H \to {}^L G$ un morphisme de transfert entre les L-groupes de deux groupes réductifs connexes définis sur $\mathbb{Q}$; soit π_H une représentation automorphe cuspidale cohomologique sur $H(\mathbb{A})$ et π_G un transfert de π_H par φ, qu'on suppose également cuspidal et cohomologique. Soit p un nombre premier en lequel π_G est non ramifié. La problématique générale de ce projet est la relation entière p-adique entre les périodes automorphes associées à π_H et π_G. Pour établir une telle relation, une étape cruciale est de construire une forme linéaire entière p-adique $L_{G/H}$ sur la cohomologie de Betti entière p-adique de l'espace localement symétrique X_G de G, qui

-s'annule sur les classes ne provenant pas de H par le transfert φ, et

-qui prend comme valeur

$$L(\mathrm{Ad}\ \pi_G, 1)/L(\mathrm{Ad}\ \pi_H, 1)$$

sur une classe normalisée associée à π_H par l'isomorphisme d'Eichler-Shimura.

Noter que ce quotient de valeurs spéciales normalisées de fonctions L adjointes est en fait lui-même une valeur spéciale normalisée de la fonction L automorphe de π_H associée à une représentation $r_H\colon {}^L H \to GL(W_{G/H})$ donnée par

$$\widehat{\mathfrak{g}}_G = \varphi_* \widehat{\mathfrak{g}}_H \oplus W_{G/H}$$

où $\widehat{\mathfrak{g}}_G$, resp. $\widehat{\mathfrak{g}}_H$, désigne l'algèbre de Lie dérivée de l'algèbre de Lie de $\widehat{G}$, resp. $\widehat{H}$.

Pour construire cette forme linéaire, il s'agit d'abord de trouver (dans la littérature) un sous-groupe G' de G et une intégrale de période sur G' qui "distingue" les transferts de H par φ (c'est-à-dire qui s'annule sur les non-transfert et qui soit calculable sur les transferts). Ensuite, il faut définir un cycle $X_{G'}$ dans l'espace localement symétrique X_G et considérer le cap-produit par ce cycle sur la cohomologie de Betti.

Dans le cas du transfert de $H = \mathrm{GL}_{2\,/\mathbb{Q}}$ à $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\,\mathrm{GL}_2$ pour un corps quadratique réel ou imaginaire F, nous avons obtenu des résultats complets dans [TU22]: soient $\Omega^{\pm}_{\pi_H}$ les périodes de Manin de π_H et

-$\Omega^{\epsilon}_{\pi_G}$, $\epsilon\colon \{\pm 1\}^2 \to \mathbb{C}^\times$ les périodes de π_G sur la surface de Hilbert si F est réel,

-resp. $\Omega^{i}_{\pi_G}$ $(i = 1, 2)$ les périodes de π_G sur la 3-variété de Bianchi si F est imaginaire.

Sous des hypothèses assez générales, nous avons montré que

-Si F réel, $\Omega^{\epsilon}_{\pi_G} \sim \Omega^{+}_{\pi_H}\Omega^{-}_{\pi_H}$,

-si F imaginaire, $\Omega^{1}_{\pi_G} \sim \Omega^{+}_{\pi_H}\Omega^{-}_{\pi_H}$

où $\sim$ signifie que le quotient est une unité p-adique.

Dans ces cas, le cycle $X_{G'}$ n'est autre que la courbe modulaire plongée dans la surface de Hilbert ou dans la 3-variété de Bianchi. Le degré de la cohomologie considérée est donc 2, qui est le degré maximal de non-annulation de la cohomologie cuspidale. De plus la valeur de la forme linéaire entière $L_{G/H}$ sur une classe provenant d'un changement de base est donnée par la valeur spéciale en $s = 1$ de la fonction L adjointe tordue de π_H (par [Hi99]). Dans les deux cas, notre démonstration établit séparément les divisibilités qui entraînent l'"égalité". Une des deux divisibilités utilise un théorème de Cornut-Vatsal, très difficile à généraliser à d'autres groupes pour le moment, tandis que l'autre utilise la forme linéaire $L_{G/H}$.

Dans sa thèse (soutenance prévue en juillet 2025), Tristan Ricoul a étudié le cas du transfert de $H_1 = \mathrm{GL}_{3\,/\mathbb{Q}}$ ou $H_2 = U_3(F/\mathbb{Q})$ à $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\,\mathrm{GL}_3$ pour un corps F quadratique réel.

Les intégrales sont, soit celle de Flicker-Rallis (intégrale sur $G' = H_1$) pour étudier le transfert de H_2 à G, soit celle de Jacquet-Ye (intégrale sur $G' = H_2$) pour étudier le transfert de H_1 à G. D'intéressants nouveaux phénomènes se produisent, puisque les cycles X_{H_i} $(i = 1, 2)$ sont de dimension 5 dans X_G (qui est de dimension 10), de sorte qu'il ne s'agit plus du degré maximal de non-annulation de la cohomologie cuspidale, ce qui crée de sérieux problèmes. Néanmoins, dans ces deux cas, non seulement une des deux divisibilités de périodes prédite est établie [Ri24], mais la fonction L p-adique qui réalise l'interpolation p-adique des valeurs spéciales en $s = 1$ de la fonction L adjointe tordue pour une famille de Hida de représentations π_{H_i} sur H_i est construite [Ri25].

Dans le cas du changement de base à un corps imaginaire quadratique, on peut démontrer des résultats (partiels) pour tout $n \geq 2$ [BaTi25] dans le cas de l'intégrale de Flicker-Rallis car cette intégrale fournit un cycle de dimension égale au degré maximal de non-annulation de la cohomologie cuspidale. Elle se calcule comme la valeur en $s = 1$ de la fonction L adjointe tordue. Notons que la valeur spéciale en $s = 1$ de la fonction L adjointe non tordue (pour GL_n) intervient aussi au dénominateur des formules d'interpolation de la fonction L du produit de Rankin dans [DiZh25]. Dans le cas de l'intégrale de Jacquet-Ye, le cycle est en degré cuspidal médian, et on doit se limiter au cas $n = 3$ et utiliser des méthodes analogues à celle de [Ri24] pour obtenir une forme (inattendue) de la divisibilité de période attendue.

Le présent projet a deux aspects. Le premier est de faire le croisement entre le travail [BaTi25] et [Ri25] afin de définir, au moins pour $H = \mathrm{GL}_{3\,/\mathbb{Q}}$, pour un corps imaginaire quadratique F, une fonction L p-adique adjointe tordue par le caractère quadratique α de F, en utilisant une "grosse" forme linéaire $L_{F/\mathbb{Q}}$ sur la cohomologie de Hida en degrÃ© cuspidal maximal, qui interpole les valeurs spéciales tordues des représentations π' dans une famille de Hida pour H.

L'autre aspect utilise les groupes $H_1 = \mathrm{GL}_{3\,/\mathbb{Q}}$ et $H_2 = U(2,1)_{F/\mathbb{Q}}$. Il concerne le cas d'une représentation π_{H_1} sur $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ qui est le transfert de Gelbart-Jacquet d'une représentation π associée à une forme elliptique cuspidale. Dans ce cas, notons que puisque π_{H_1} est selfduale, on peut aussi définir son changement de base π_{H_2} à H_2. On a les décompositions :

$$L(\mathrm{Ad}, \pi_{H_1}, s) = L(\mathrm{Ad}\ \pi, s)L(\mathrm{Sym}^4 \otimes \det{}^{-2}, \pi, s),$$

$$L(\mathrm{Ad}, \pi_{H_1} \otimes \alpha, s) = L(\mathrm{Ad}\ \pi \otimes \alpha, s)L(\mathrm{Sym}^4 \otimes \det{}^{-2} \otimes \alpha, \pi, s).$$

Mais aussi

$$L(\mathrm{Ad}_{H_2}, \pi_{H_2}, s) = L(\mathrm{Ad}\ \pi, s)L(\mathrm{Sym}^4 \otimes \det{}^{-2} \otimes \alpha, \pi, s).$$

Il s'agit alors de généraliser un calcul de Shih-Yu Chen pour établir une formule de Hida reliant $L(\mathrm{Ad}_{H_2}, \pi_{H_2}, 1)$ et le nombre de congruences de π_{H_2} pour le groupe unitaire H_2. Le cycle X_{H_2} n'est autre que la surface de Picard (donc, une variété de Shimura), et on a un diagramme de huit nombres de congruences et de périodes, la plupart connues. Ceci pourrait permettre d'étudier les périodes entières de la valeur non-critique $L(\mathrm{Sym}^4 \otimes \det{}^{-2} \pi, 1)$ et de la valeur critique $L(\mathrm{Sym}^4 \otimes \det{}^{-2} \otimes \alpha, \pi, 1)$.

References

[BaTi25] B. Balasubramanyam, J. Tilouine, Congruences and period relations for imaginary quadratic base change for GL_3, preprint

[Ch25] S.-Y. Chen, Algebraicity for adjoint L functions for $GU(2,1)$, preprint

[DiZh25] D. Disegni, W. Zhang, Gan-Gross-Prasad cycles and derivatives of p-adic L-functions, preprint

[Hi99] H. Hida, Non-critical values of adjoint L function for SL_2, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Volume 66.1, 1999

[Ri24] T. Ricoul, Real quadratic base changes for GL_3 and integral period relations, math arXiv:2411.16381 [math.NT]

[Ri25] T. Ricoul, A p-adic L-function for the adjoint representation of GL_3 twisted by an even quadratic character, preprint

[TU22] J. Tilouine, E. Urban, Integral period relations and congruences, Algebra and Number Theory Vol.16, No.3, 2022