Étude des représentations génériques scindées des groupes linéaires

Sujet de thèse proposé par Aurélien DJAMENT (djament@math.cnrs.fr, https ://djament.perso.math.cnrs.fr/), chargé de recherche HDR au LAGA (UMR7539), laboratoire USPN (Institut Galilée)/CNRS dirigé par Grégory GINOT (dirlaga@math.univ-paris13.fr).

Soient A et k des anneaux commutatifs. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie essentiellement petite, on note $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers la catégorie k-**Mod** des k-modules. On note $\mathbf{P}(A)$ la sous-catégorie pleine de A-**Mod** constituée des modules libres de rang fini, et $\mathbf{M}(A)$ la sous-catégorie de $\mathbf{P}(A)$ ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont les monomorphismes possédant un scindement. On note enfin $\mathbf{S}(A)$ la catégorie ayant les mêmes objets que $\mathbf{P}(A)$ et dont les morphismes sont les monomorphismes munis d'un scindement : $\big(\mathbf{S}(A)\big)(U,V) := \{(f,g) \in \mathrm{Hom}_A(U,V) \times \mathrm{Hom}_A(V,U) \,|\, g \circ f = \mathrm{Id}_U\}$, avec la composition $(f',g').(f,g) := (f' \circ f, g \circ g')$.

Les catégories de foncteurs $\mathcal{F}(\mathbf{P}(A);k)$ font l'objet de nombreux travaux depuis le début des années 1950 et l'introduction par Eilenberg et MacLane [4] des *foncteurs polynomiaux* entre modules, qui se sont révélés importants en topologie algébrique, en théorie des représentations ou en K-théorie algébrique [6]. Kuhn [8] a nommé *représentations génériques* sur k des groupes linéaires $\mathrm{GL}_n(k)$ les foncteurs de $\mathcal{F}(\mathbf{P}(A);k)$, car de tels foncteurs fournissent par évaluation des représentations k-linéaires des groupes $\mathrm{GL}_n(A)$, avec des propriétés de « cohérence ».Il existe toutefois d'autres catégories de foncteurs qui peuvent légitimement prétendre à l'appellation de *représentations génériques* des groupes linéaires. Ainsi, remplacer la source $\mathbf{P}(A)$ par sa sous-catégorie de monomorphismes scindés $\mathbf{M}(A)$ fournit encore, par évaluation des foncteurs de $\mathcal{F}(\mathbf{M}(A);k)$, des familles de représentations k-linéaires des groupes $\mathrm{GL}_n(A)$. Nagpal [9, 10] ainsi étudié les foncteurs de $\mathcal{F}(\mathbf{M}(A);k)$ dans le cas d'inégale caractéristique où A est un corps fini et k un corps de caractéristique différente de celle de A.

Nous nous proposons dans cette thèse de considérer les représentations génériques *scindées* des groupes linéaires, c'est-à-dire les foncteurs de $\mathcal{F}(\mathbf{S}(A);k)$. Un foncteur F de cette catégorie fournit en effet lui aussi une suite $(F(A^n))$ de représentations k-linéaires des groupes $\mathrm{GL}_n(A)$, et de tels objets apparaissent naturellement en K-théorie algébrique (dès les travaux inauguraux de Quillen) ou pour l'étude la stabilité homologique pour les groupes linéaires. Les travaux fondamentaux de Scorichenko [11] (tels que légèrement revisités dans [1], l'approche initiale utilisant plutôt la catégorie $\mathbf{M}(A)$) sur l'homologie stable des groupes $\mathrm{GL}_n(A)$ — ou, de façon équivalente, sur la K-théorie stable de A — à coefficients polynomiaux font intervenir de façon cruciale un théorème de comparaison homologique entre les catégories $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{S}(A)$.

La catégorie $\mathbf{S}(A)$, comme $\mathbf{M}(A)$ est une catégorie *EI* (tous les endomorphismes sont des isomorphismes) dont les flèches sont des monomorphismes ; en particulier, on dispose d'une notion de *foncteur atomique* (foncteur dont toutes les valeurs sont nulles, sauf sur la classe d'isomorphisme d'un objet à la source). Tous les objets simples (i.e. non nuls et sans sous-objet non trivial) de $\mathcal{F}(\mathbf{S}(A);k)$ sont atomiques, et il est intéressant de considérer la catégorie quotient de cette catégorie de foncteurs par la sous-catégorie localisante engendrée par les foncteurs atomiques. Cette catégorie quotient sera autant l'objet d'étude de la thèse que la catégorie de foncteurs initiale. On s'y intéressera à des propriétés fondamentales des catégories abéliennes : description des objets simples, questions de finitude, calculs cohomologiques. La notion de foncteur polynomial (qui se généralise dans ce contexte ; cf. [3]) jouera un rôle fondamental : on s'attend à obtenir bien davantage de résultats de classification pour les foncteurs polynomiaux de source $\mathbf{S}(A)$ (comme pour ceux de source $\mathbf{P}(A)$) que dans le cas général, sauf peut-être lorsque A est fini et de cardinal inversible dans k, où l'on pourra s'inspirer des méthodes de Nagpal.

Références

[1] Aurélien Djament. *Sur l'homologie des groupes unitaires à coefficients polynomiaux.* J. K-Theory 10, No. 1, 87-139 (2012).

[2] Aurélien Djament et Thomas Gaujal. *Représentations génériques des groupes linéaires finis en inégale caractéristique.* Bull. Soc. Math. Fr. 152, No. 2, 295-354 (2024).

[3] Aurélien Djament et Christine Vespa. *Foncteurs faiblement polynomiaux.* Int. Math. Res. Not. 2019, No. 2, 321-391 (2019).

[4] Samuel Eilenberg et Saunders MacLane. *On the groups $H(\Pi, n)$. II.* Ann. Math. (2) 60, 49-139 (1954).

[5] Vincent Franjou, Eric Friedlander, Alexander Scorichenko et Andrei Suslin. *General linear and functor cohomology over finite fields.* Ann. Math. (2) 150, No. 2, 663-728 (1999).

[6] Vincent Franjou et Antoine Touzé (éd.). *Lectures on functor homology.* Proceedings of the conference on functor homology, Nantes, France, April 2012. Progress in Mathematics 311. Cham : Birkhäuser/Springer (2015).

[7] Thomas Gaujal. *Étude des représentations génériques des groupes linéaires en inégale caractéristique.* Thèse de doctorat, université de Lille (2022).

[8] Nicholas J. Kuhn. *Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. I.* Am. J. Math. 116, No. 2, 327-360 (1994).

[9] Rohit Nagpal. *VI-modules in nondescribing characteristic. I.* Algebra Number Theory 13, No. 9, 2151-2189 (2019).

[10] Rohit Nagpal. *VI-modules in nondescribing characteristic. II.* J. Reine Angew. Math. 781, 187-205 (2021).

[11] Alexander Scorichenko. *Stable K-theory and functor homology over a ring.* Thèse de doctorat, Evanston (2000).