

Contrat doctoral – ED Galilée

Titre du sujet : Surfaces branchées et flots hyperboliques en dimension 3

- Unité de recherche : LAGA UMR 7539
- Discipline : Mathématiques
- Direction de thèse : François Béguin
- Contact : Université Sorbonne Paris Nord, 99, avenue Jean-Baptiste Clément,
Villetaneuse, 93430, beguin@math.univ-paris13.fr
- Domaine de recherche : Mathématiques
- Mots clés : Systèmes Dynamiques, Topologie différentielle,

Le sujet proposé se situe au confluent de la topologie des variétés, de la théorie des feuilletages, et de la théorie des systèmes dynamiques hyperboliques. La plupart des questions du sujet revêtent par ailleurs un aspect combinatoire et algorithmique.

La notion de *réseau ferroviaire* a été introduite (sous le nom de *variété branchée de dimension 1*) par R. F. Williams dans les années 1970 pour étudier les attracteurs hyperboliques des difféomorphismes de surfaces. Il existe un objet parfaitement analogue aux réseaux ferroviaires qui devrait permettre d'étudier les attracteurs hyperboliques des flots en dimension 3 : les *surfaces branchées*. L'étude de ces objets, initiée par J. Christy dans les années 1990, a cependant été viciée dès le départ par des erreurs dans les articles de bases, et des annonces présomptueuses de résultats ambitieux qui n'ont jamais été concrétisées.

Le temps ayant passé (il est maintenant clair que certaines annonces de Christy étaient infondées), et la compréhension des flots hyperboliques en dimension 3 ayant beaucoup progressé, il me semble qu'il est possible de reprendre cette théorie intéressante sur des bases saines.

Problème 1-a. *Trouver une notion de surface branchée dynamique telle qu'une telle surface porte un unique (à équivalence orbitale près) attracteur hyperbolique de flot en dimension 3.*

Puisqu'une surface branchée est entièrement décrite par un objet combinatoire simple (un graphe fini avec une orientation transverse des arrêtes), la solution du problème ci-dessus fournirait des présentations combinatoires des attracteurs hyperboliques de flots en dimension 3. Un attracteur hyperbolique correspond cependant toujours à une infinité de surfaces branchées différentes et on est donc alors naturellement confronté au problème suivant :

Problème 1-b. Étudier la combinatoire des surfaces branchées dynamiques correspondant à un même flot. Chercher s'il existe des surfaces branchées privilégiées canoniquement associées à un attracteur hyperbolique. Chercher dans quelle mesure le problème d'équivalence est résoluble : peut-on déterminer (algorithmiquement) si deux surfaces branchées dynamiques différentes correspondent à un même flot ?

Si les réseaux ferroviaires, mentionnés plus haut, ont été introduit pour étudier les attracteurs hyperboliques des difféomorphismes de surfaces, leur succès provient surtout de leur utilisation, initiée par M. Bestvina, M. Handel, R. Penner..., pour décrire les *laminations géodésiques d'une surface*, puis les éléments du *groupe modulaire* d'une surface, et notamment ceux de type *pseudo-Anosov*. De même, les surfaces branchées ont été utilisées pour décrire les *laminations tendues* sur une variété de dimension 3 (notamment par D. Gabai et U. Oertel qui ont montré que sur une 3-variété atoroidale, toutes les laminations tendues sont portée par un nombre fini de surfaces branchées). Elles n'ont cependant pas été exploitées pour appréhender les flots pseudo-Anosov en dimension 3, ce qui est a priori possible.

Problème 2-a. Montrer qu'une surface branchée dynamique détermine un flot pseudo-Anosov à équivalence orbitale près.

Problème 2-b. Essayer de comprendre à quelle condition deux surfaces branchées différentes correspondent à un même flot pseudo-Anosov.

Certains travaux les plus récents décrivent les éléments du groupe modulaire d'une surface non pas à l'aide d'un seul réseau ferroviaire, mais en considérant une paire de réseaux ferroviaires transverses portés par une triangulation décorée, dite *triangulation en hélice* (travaux de M. C. Bell, V. Delecroix, V. Gadre, R. Guiterrez-Romo, S. Schleimer). Il semble naturel d'adopter une approche similaire, qui évite de casser la symétrie entre passé et futur, pour les flots en dimension 3.

Problème 2-c. Comprendre dans quelle mesure un flot pseudo-Anosov sur une variété M de dimension 3 est entièrement décrit (à équivalence orbitale près) par une paire de surfaces branchées transverses portées par une triangulation de M . Comprendre quelle décoration de la triangulation permet de coder cette paire de surfaces branchées.

Problème 2-d. En lien avec le théorème de Gabai et Oertel mentionné plus haut, tenter d'utiliser les (paires de) surfaces branchées pour attaquer la question de la finitude des classes d'équivalences orbitales de flots pseudo-Anosov sur une variété donnée.

Les problèmes listés ci-dessus sont a priori de difficultés très inégales. Ainsi, je pense le problème 1.a. est soluble assez facilement. Les problèmes 2-a et 2-c nécessitent du travail, mais me semblent tout à fait abordables. La résolution complète du problème 1.b nécessite des idées originales, et constituerait un très beau résultat. Enfin, le problème 2.d. aborde une des questions les plus centrales de la théorie des flots (pseudo-)Anosov en dimension 3, et il est certainement naïf de croire qu'il puisse être résolu par le seul éclairage d'un point de vue nouveau.

Le sujet s'appuie sur la théorie des systèmes dynamiques hyperbolique, la théorie de Nielsen-Thurston et des réseaux ferroviaires, et la topologie des variétés de dimension 3. Une certaine familiarité avec tout ou partie de ces théories est donc attendue de la part des candidat(e)s.