

Titre du sujet : Actions p.m.p. de $O(H)$

- Unité de recherche : LAGA
- Discipline : Mathématiques
- Direction de thèse : Emmanuel Roy (LAGA)
- Contact : Emmanuel Roy (roy@math.univ-paris13.fr)
- Domaine de recherche : Théorie ergodique
- Mots-clés : Théorie ergodique, Groupes polonais, processus Gaussiens

Depuis quelques années, les groupes Polonais non localement compacts sont l'objet d'un intérêt grandissant. Ils apparaissent naturellement à la frontière de plusieurs domaines : théorie descriptive des ensembles, théorie des modèles, théorie ergodique, théorie des représentations et probabilités.

Donnons quelques exemples classiques :

- $Sym(N)$: le groupe des permutations d'un ensemble dénombrable.
- $Aut(X, \mathcal{A}, \mu)$: le groupe des (classes d'équivalences de) transformations préservant la mesure d'un espace de probabilité Borel standard (X, \mathcal{A}, μ) .
- $O(H)$ (resp. $U(H)$) : le groupe des opérateurs orthogonaux (resp. unitaires) d'un espace de Hilbert séparable réel (resp. complexe) de dimension infinie H .
- $L^0((X, \mathcal{A}, \mu), S^1)$: le groupe des (classes d'équivalences de) fonctions mesurables d'un espace de probabilité Borel standard (X, \mathcal{A}, μ) à valeurs dans le cercle unité.

Propriétés de rigidité de $O(H)$

Dans ce projet de thèse, il sera question de s'intéresser au groupe $O(H)$ pour lequel un certain nombre de propriétés de rigidité sont connues :

- La topologie faible des opérateurs bornés est l'unique topologie (de groupe topologique) Polonaise sur $O(H)$, notée τ [4].
- **Continuité automatique** : tous les morphismes de $(O(H), \tau)$ vers des groupes séparables sont continus [4].
- $O(H)$ a la propriété (T) forte de Kazhdan [1].
- Les représentations unitaires de $O(H)$ sont entièrement connues et les plus simples possibles (théorème de Krilov-Ol'shanski) [2, 3].

Objectifs de la thèse

Rappelons que l'on appelle action p.m.p. (préservant une mesure de probabilité) d'un groupe topologique G sur un espace de probabilité (X, \mathcal{A}, μ) , un morphisme continu de G dans $Aut(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Il est remarquable de constater que les seules actions p.m.p. connues de $O(H)$ sont obtenues à partir des constructions Gaussiennes qui permettent, à partir d'une représentation orthogonale, d'associer une action p.m.p. de manière canonique. Il est alors raisonnable de conjecturer que $O(H)$ possède peu d'actions p.m.p..

L'objet de la thèse sera d'investiguer plus avant dans cette direction et de contribuer ainsi à la classification des actions p.m.p. de $O(H)$.

Contexte scientifique

Le récent développement des liens entre logique continue en théorie des modèles et théorie ergodique s'incarne parfaitement ici à travers le groupe $O(H)$. Tomás Ibarlucía (MCF, IMJ-Paris cité), spécialiste du domaine, sera co-encadrant de la thèse.

Ce sujet concerne des thématiques très actuelles, incarnées dans le projet ANR DynaPol (*Dynamical Systems of Polish groups*), coordonné par Todor Tsankov.

Références

- [1] M. B. Bekka. Kazhdan property (T) for the unitary group of a separable Hilbert space. *Geom. Funct. Anal.*, 13(3) :509-520, 2003.
- [2] A. A. Kirillov. Representations of the infinite-dimensional unitary group. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 212 :288-290, 1973.
- [3] G. L. Olshanski. Unitary representations of the infinite-dimensional classical groups. *Funktsional. Anal. i Prilozhen*, 12(3) :32-44, 1978.
- [4] T. Tsankov. Automatic continuity for the unitary group. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141 :3673-3680, 2013.