École doctorale de l'Institut Galilée
99 avenue JB Clément
directeur-ecoledoc-galilee@univ-paris13.fr
01 49 40 20 65
93430 Villetaneuse

Satake géométrique avec coefficients p-adiques et descriptions modulaires des modèles locaux

Unité de recherche : Institut Galilée, LAGA
Discipline : Maths

Sujet de thèse proposé par
— LOURENÇO João (100%), Université Sorbonne Paris Nord : lourenco@math.univ-paris13.fr
La thèse s'effectuera
— au LAGA (Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539).
Des missions d'enseignement pourront être proposées notamment en M1 en anglais au département de maths de l'Institut Galilée.

Domaine de recherche : Géométrie arithmétique, programme de Langlands, théorie géométrique des représentations
Mots clés : Modèles locaux p-adiques, grassmannienne affine, faisceaux pervers, Satake géométrique, coefficients p-adiques, descriptions modulaires

1. Contexte mathématique

1.1. **La grassmannienne affine et les modèles locaux des variétés de Shimura.** La grassmannienne affine est un ind-schéma fondamental qui joue un rôle central à la fois dans le programme de Langlands géométrique et dans l'arithmétique des variétés de Shimura. Soit G un groupe réductif connexe sur un corps local F et $\mathcal{G}$ un modèle parahorique de G sur l'anneau des entiers O au sens de Bruhat–Tits. La grassmannienne de Beilinson–Drinfeld $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$ est un espace de modules sur O qui interpole entre la variété de drapeaux affine $\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}$ sur le corps résiduel k et la grassmannienne affine Gr_G sur F.

Du côté arithmétique, les modèles entiers des variétés de Shimura aux niveaux parahoriques $\mathcal{G}$ admettent une application lisse vers le modèle local $M_{\mathcal{G},\mu}$, lui-même plongé dans $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$ comme adhérence d'une orbite de Schubert, où μ est un copoids minuscule. La géométrie de ces modèles locaux encode des informations cruciales sur la cohomologie des variétés de Shimura et leurs propriétés de réduction modulo p : comprendre leurs singularités, leur normalité, et leurs descriptions modulaires est au cœur de nombreux résultats récents sur le programme de Langlands.

1.2. L'équivalence de Satake géométrique. L'isomorphisme de Satake classique identifie l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_G$ de G aux invariants de Weyl de l'algèbre de Hecke d'un tore maximal $T \subset G$. L'équivalence de Satake géométrique de Mirković–Vilonen catégorifie cet isomorphisme en établissant une équivalence monoïdale symétrique

$$\mathcal{P}(\mathrm{Hk}_{\mathcal{G}}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \;\simeq\; \mathrm{Rep}(G^\vee)$$

entre la catégorie des faisceaux pervers ℓ-adiques (pour $\ell \neq p$) sur le champ de Hecke $\mathrm{Hk}_{\mathcal{G}}$ et la catégorie des représentations du groupe dual de Langlands $G^\vee$. Cette équivalence fournit les *faisceaux de Satake*, utilisés comme noyaux de convolution dans les opérateurs de Hecke géométriques.

Dans le cadre p-adique, Fargues–Scholze ont établi cette équivalence pour $\ell \neq p$ en s'appuyant sur la théorie des espaces perfectoïdes et le concept de faisceaux uniformément localement acycliques. La situation $\ell = p$ est d'une nature radicalement différente et constitue l'un des fronts de recherche les plus actifs de la théorie. C'est l'objet de la première partie de ce projet de thèse.

2. Satake géométrique avec coefficients p-adiques

2.1. Faisceaux pervers modulo p et la conjecture de rationalité. Travaillons désormais avec des coefficients $\bar{\mathbb{F}}_p$ pour les faisceaux étales, c'est-à-dire dans le cas $\ell = p$. La catégorie dérivée $\mathcal{D}(\mathrm{Hk}_{\mathcal{G}})$ se comporte très différemment du cas $\ell \neq p$: les foncteurs $f^!$, f_* et Hom ne préservent plus la constructibilité usuelle. Elle admet néanmoins une t-structure perverse due à Gabber, récemment réinterprétée dans les travaux de Bhatt–Blickle–Lyubeznik–Singh–Zhang, et l'on peut considérer le cœur pervers $\mathcal{P}(\mathrm{Hk}_{\mathcal{G}})$ et les faisceaux IC correspondants. Un lien fondamental entre l'algèbre commutative et la géométrie des faisceaux a été établi : le faisceau IC_X d'un schéma parfait X est constant à un décalage près si et seulement si X est φ-rationnel, c'est-à-dire Cohen–Macaulay avec une cohomologie locale supérieure Frobenius-simple.

Conjecture 2.1. *Le faisceau* IC *de la variété de Schubert* $\mathrm{Hk}_{\mathcal{G},\leq w}$ *est constant à un décalage près, pour tout élément w du groupe d'Iwahori–Weyl.*

En caractéristique p égale, cette conjecture a été prouvée par Cass comme conséquence de la φ-régularité forte des variétés de Schubert via la suite d'Artin–Schreier ; à un niveau hyperspécial, cela fournit un Satake géométrique modulo p avec un monoïde dual à la place du groupe dual. Dans des travaux communs avec Cass, j'ai donné une nouvelle preuve qui s'applique également dans le cadre p-adique pour w suffisamment petit (en fonction du degré de ramification de $F/\mathbb{Q}_p$), et fourni une borne explicite via la $+$-régularité globale. Pour un groupe fixé, la conjecture reste ouverte pour une infinité de w.

Un premier axe de la thèse consistera à prouver cette conjecture pour GL_n à un niveau hyperspécial. La stratégie envisagée repose sur la vérification que certaines déperfections de Zhu sont φ-nilpotentes, permettant d'en déduire la φ-rationalité des variétés de Schubert correspondantes. Un outil clé sera la combinatoire des chemins de Littelmann pour établir des formules de caractère de Demazure dans le cadre parfait.

2.2. **Satake géométrique avec coefficients p-adiques intégraux.** Une direction plus ambitieuse de la thèse porte sur les coefficients véritablement p-adiques, à valeurs dans $\bar{\mathbb{F}}_p$, $\bar{\mathbb{Z}}_p$, ou $\bar{\mathbb{Q}}_p$. Définir et contrôler un formalisme de faisceaux étales avec de tels coefficients est extrêmement difficile : la définition naïve se comporte mal, car les foncteurs de base changement ne préservent pas les bonnes catégories. La bonne approche s'inspire de l'équivalence de Riemann–Hilbert de Bhatt–Lurie : on considère des presque $\mathcal{O}_X^+/\varpi$-modules munis d'une structure de Frobenius inversible. Cette approche a été développée par Mann sur $\bar{\mathbb{F}}_p$ et plus récemment par Anschütz–Le Bras–Mann sur $\bar{\mathbb{Z}}_p$ et $\bar{\mathbb{Q}}_p$ via des faisceaux quasi-cohérents sur la courbe de Fargues–Fontaine.

Prouver le Satake géométrique avec coefficients p-adiques pour le champ de Hecke Hk_G dans le cadre p-adique serait l'un des buts principaux de la thèse. On ne peut pas suivre directement l'approche de Fargues–Scholze, car elle recourt à deux reprises à une réduction à la grassmannienne de Witt (en caractéristique p) et utilise une fois le théorème de décomposition pour $\ell \neq p$. La stratégie de substitution consiste à remplacer ces réductions par une étude plus fine de la géométrie de Gr_G en caractéristique 0, en s'inspirant de la théorie des faisceaux de parité et de la moyenne d'Iwahori–Whittaker. En particulier, il s'agit de généraliser les pavages de Haines par des fibrations pro-étales successives de fibres $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}_p}$ ou $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}_p}$.

Le futur doctorant pourra s'insérer dans ce projet en étudiant d'une part la géométrie des variétés de Schubert dans la grassmannienne affine B_{dR}^+-Gr_G, et d'autre part les propriétés de Cohen–Macaulay et de cohomologie locale pour ces variétés dans le cadre p-adique. Ces résultats auront des applications directes à la géométrie des modèles locaux des variétés de Shimura : en particulier, la pseudo-rationalité des modèles locaux conjecturée dans mes travaux communs avec Fakhruddin, Haines et Richarz semble accessible par ces méthodes en caractéristique mixte.

2.3. **Prismatisation analytique et correspondance de Langlands localement analytique.** Un développement récent étroitement lié à ce programme est la prismatisation analytique, en cours de développement par Anschütz–Bosco–Le Bras–Rodríguez Camargo–Scholze. Ils initient l'étude des champs de de Rham analytiques de la courbe de Fargues–Fontaine relative, en développant un formalisme de descente et d'approximation adapté au cadre analytique, et obtiennent notamment une nouvelle preuve du théorème de monodromie p-adique, indépendante des résultats antérieurs sur les équations différentielles p-adiques. Un travail en cours des mêmes auteurs développe la théorie complète de la prismatisation analytique sur $\mathbb{Z}_p$, en s'inspirant des prismes de Bhatt–Lurie et Drinfeld.

La motivation de ce programme est de géométriser la correspondance de Langlands localement analytique, c'est-à-dire d'obtenir un analogue de la correspondance de Fargues–Scholze dans le régime $\ell = p$, mais pour des représentations localement analytiques de $G(F)$ plutôt que lisses. Ce faisant, les faisceaux ℓ-adiques de Fargues–Scholze sont remplacés par des $\mathcal{D}$-modules analytiques, dans la lignée des travaux de Rodrigues Jacinto–Rodríguez Camargo.

Pour mener à bien ce programme, il est nécessaire de définir les variétés de Schubert dans Gr_G dans un cadre analytique, de façon analogue à ce qui est requis dans le projet avec Richarz–Viehmann–Wedhorn pour les modèles locaux. Cela illustre que la géométrie de ces espaces est d'une grande délicatesse : les mêmes difficultés se retrouvent dans des contextes a priori distincts, et les outils développés dans ce projet de thèse — Cohen–Macaulay, cohomologie locale, géométrie de la grassmannienne affine B_{dR}^+ — s'inscrivent naturellement au cœur des développements les plus récents du programme de Langlands géométrique p-adique.

3. Descriptions modulaires des modèles locaux

3.1. **Historique et motivations.** Depuis les travaux fondateurs de Deligne–Pappas et Rapoport–Zink, les modèles locaux des variétés de Shimura ont été abordés via des espaces de modules d'algèbre linéaire, classifiant des chaînes ou des réseaux dans des espaces vectoriels liés aux données de Hodge de la variété de Shimura. Cette approche dite *modulaire* a l'avantage de produire des schémas intègres concrets définis par des équations explicites.

Une division a émergé lorsque Görtz a observé que les modèles locaux $M_{\mathcal{G},\mu}$ peuvent être plongés dans la grassmannienne de Beilinson–Drinfeld, orientant ainsi la théorie vers la théorie géométrique des représentations. La définition via la grassmannienne affine, systématisée dans mes travaux communs avec Anschütz, Gleason et Richarz, est canonique et couvre les groupes réductifs arbitraires, mais est de nature perfectoïde et donc moins accessible pour les calculs directs. Ces dernières années, on assiste à un renouveau de l'approche modulaire des modèles locaux, notamment dans les travaux de Bijakowski–Hernández et Zachos–Zhao, qui proposent des descriptions explicites dans des cas particuliers. Le projet de thèse vise à unifier et à étendre ces approches.

3.2. **La conjecture de description modulaire.** En collaboration avec Richarz–Viehmann–Wedhorn, j'ai formulé la conjecture suivante, qui donne une description intrinsèque des modèles locaux en termes de réseaux dans B_{dR}.

Conjecture 3.1. *Soit G non ramifié et simplement connexe. Alors $M_{\mathcal{G},\mu}$ est le sous-foncteur de $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},O_E}$ constitué des modifications $(\mathcal{E},\alpha)$ du G-torseur trivial telles que, pour toute représentation $\mathcal{V}$ de $\mathcal{G}$, le réseau correspondant $\Lambda_{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V} \otimes B_{\mathrm{dR}}$ contient $\xi^{d_\mu(\mathcal{V})}\mathcal{V} \otimes B_{\mathrm{dR}}^+$, où $d_\mu(\mathcal{V})$ désigne le plus haut poids de la représentation $\mathcal{V}$.*

Cette conjecture, de nature entièrement topologique, est équivalente à demander la cartésianité du diagramme naturel

$$\begin{array}{ccc} M_{\mathcal{G},\mu} & \longrightarrow & \prod_{i=1}^{n} M_{\mathrm{GL}(\mathcal{V}_i),\,\rho_i\circ\mu} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}} & \longrightarrow & \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Gr}_{\mathrm{GL}(\mathcal{V}_i)} \end{array} \tag{3.1}$$

pour une collection finie de représentations $\mathcal{V}_i$ de $\mathcal{G}$. La conjecture est connue en fibre générique, mais devient délicate en fibre spéciale à cause des éléments μ-admissibles indésirables.

3.3. **Résultats partiels.** Plusieurs observations permettent de décomposer le problème dans le cadre du projet commun avec Richarz–Viehmann–Wedhorn. Premièrement, via la description sommet par sommet de Haines–He, la conjecture se ramène aux parahoriques maximaux ; en particulier, elle est vraie pour les groupes de type A et, par un argument de points fixes dans les travaux de Haines–Ngô, pour le type C. Deuxièmement, on peut vérifier que les cellules de Schubert dans l'espace modulaire proposé sont μ-admissibles au sens de Kottwitz–Rapoport.

La difficulté principale réside dans l'élimination des strates μ-admissibles qui ne sont pas μ-permissibles. Ces strates, situées dans les W_0-doubles classes de t_μ, doivent être exclues de l'espace modulaire proposé. La question se ramène à retrouver l'ordre de Bruhat de W_0 à partir des ordres de Bruhat des groupes de Weyl des représentations de plus haut poids de G ; cette propriété est accessible via les algorithmes de He–Yu et les contre-exemples de Deodhar apparaissant dans les travaux de Haines–Ngô. Un premier objectif du projet avec Richarz–Viehmann–Wedhorn est de prouver la conjecture pour μ minuscule, cas dans lequel le contrôle de l'élément μ-admissible maximal est plus accessible.

3.4. **La conjecture de Finkelberg–Mirkovič et les modules de distributions.** Une version plus forte de la conjecture tient compte des structures non réduites des modèles locaux. Pour la fibre générique, c'est-à-dire pour les variétés de Schubert elles-mêmes, le résultat n'est connu que pour le type A et reste une conjecture ouverte de Finkelberg–Mirković en général. Des calculs récents d'espaces tangents de Kisin–Pappas–Zhou apportent des indices supplémentaires, mais l'espace modulaire étant a priori non réduit, les différentiels d'ordre supérieur ne sont pas capturés par les seuls espaces tangents.

Pour aborder cette question, nous proposons d'utiliser les *modules de distributions*, c'est-à-dire les opérateurs différentiels d'ordre arbitraire agissant sur les variétés de drapeaux affines. Cette approche, que j'ai développée dans mes travaux antérieurs pour établir la normalité des variétés de Schubert en caractéristique positive, fournit un accès à la structure des anneaux locaux des modèles locaux au-delà de l'approximation linéaire. Elle peut être adaptée pour calculer les différentiels d'ordre supérieur dans l'espace modulaire proposé et ainsi valider les candidats pour les modèles locaux non réduits.

Résoudre conjointement la conjecture de Finkelberg–Mirković pour les variétés de Schubert et la conjecture de description modulaire permettrait d'établir la description modulaire complète, incluant les structures non réduites, pour tous les modèles locaux. Ce programme ambitieux ouvre de nouvelles perspectives pour l'arithmétique des variétés de Shimura.