Titre du sujet : Limite de diffusion fractionnaire dans des domaines

Unité de recherche : LAGA, Institut Galilée, Université Sorbonne Paris Nord.

Discipline : Mathématiques appliquées

Direction de thèse : Nicolas Fournier (directeur), Loïc Béthencourt (co-encadrant)

Contact : bethencourt@math.univ-paris13.fr, nicolas.fournier@sorbonne-universite.fr

Domaine de recherche : Probabilités

Mots-clés : limite de diffusion, théorème central limite, processus α-stables réfléchis, modèle cinétique de Fokker-Planck critique.

1 Contexte scientifique

Les limites de diffusion fractionnaire donnent une justification mathématique du passage d'une EDP décrivant un système à l'échelle *mésoscopique*, à l'équation de la chaleur fractionnaire, qui en donne une vision *macroscopique*. Au cours des deux dernières décennies, de nombreux travaux ont établi de tels résultats pour des équations cinétiques linéaires, tant par la communauté EDP, que par la communauté probabiliste. Les articles [2, 13, 15, 16] traitent de l'équation de scattering (ou Boltzmann linéaire) et les articles [5, 7–12, 14] étudie l'équation cinétique de Fokker-Planck.

Cette dernière équation décrit la loi d'un processus aléatoire $(X_t, V_t)_{t\geq 0}$, où $X_t \in \mathbb{R}^d$ (resp. $V_t \in \mathbb{R}^d$) représente la position (resp. la vitesse) d'une particule qui subit des chocs aléatoires, ainsi qu'une force de rappel $F(v) = -\frac{\beta}{2}\frac{v}{1+|v|^2}$ pour un paramètre $\beta > 0$. Les équations de Newton décrivant l'évolution de la particule sont

$$V_t = V_0 + B_t - \frac{\beta}{2}\int_0^t \frac{V_s}{1+|V_s|^2}ds, \qquad X_t = X_0 + \int_0^t V_s ds, \tag{1}$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien modélisant les chocs aléatoires. La mesure invariante du processus $(V_t)_{t\geq 0}$, donnée par $\mu(dv) = (1+|v|^2)^{-\beta/2}dv$, est à queue lourde, ce qui laisse naturellement penser qu'on peut obtenir un processus α-stable (dont la loi est la solution de la chaleur fractionnaire) à partir de ce modèle. Il y a en fait plusieurs régimes, voir [11, 12] :

(i) Si $\beta > 4 + d$, alors $(\varepsilon^{1/2}X_{t/\varepsilon})_{t\geq 0}$ converge en loi, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers un mouvement brownien (de dimension d).

(ii) Si $\beta \in (d, 4 + d)$, alors $(\varepsilon^{1/\alpha}X_{t/\varepsilon})_{t\geq 0}$ converge en loi, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers un processus α-stable isotrope, pour $\alpha = (\beta + 2 - d)/3$.

(iii) Si $\beta \in (d-2, d)$, alors $(\varepsilon^{3/2}X_{t/\varepsilon})_{t\geq 0}$ converge en loi, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers l'intégrale d'un processus de Bessel (généralisé).

Nous soulignons que les physiciens ont par ailleurs découvert que lorsqu'ils sont refroidis par un laser, les atomes diffusent anormalement (voire Castin, Dalibard and Cohen-Tannoudji [6] et Sagi, Brook, Almog and Davidson [17]). Une étude théorique (Barkai, Aghion and Kessler [1]) modélisant le mouvement des atomes *précisément* par (1) conjecture même les différentes phases énoncées ci-dessus.

2 Sujet de thèse

L'objectif de cette thèse est d'étudier le modèle cinétique de Fokker-Planck dans un domaine régulier $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$, avec des conditions de bord diffusives. Lorsque le processus X_t atteint le bord du domaine $\partial\mathcal{D}$, il est réfléchi de la manière suivante : on tire aléatoirement une nouvelle vitesse dirigée vers l'intérieur du domaine, selon une certaine mesure de probabilité ν.

En dimension 1 et pour $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+$, ce modèle a été étudié dans [3] : dans le régime α-stable ($\beta \in (1, 5)$), si la mesure ν a un moment d'ordre $\alpha/2$, alors la limite d'échelle du processus de position est un processus α-stable réfléchi sur son infimum.

En dimension quelconque et pour des domaines fortement convexes, ce problème a été étudié dans [4]. On a construit le processus limite et établi la limite de diffusion fractionnaire pour le modèle de scattering. Le processus limite est un processus α-stable isotrope réfléchi et sa construction n'est pas simple. Elle repose sur une *synthèse d'Itô*, consistant à construire un processus en concaténant ses excursions à l'intérieur du domaine. En fait, deux types de processus sont construits, un premier $(R_t^c)_{t\geq 0}$ qui ressort de manière "continue" du bord de $\mathcal{D}$ et le second $(R_t^{\mathrm{d}})_{t\geq 0}$ qui ressort par un saut. Concernant la limite de diffusion, on distingue deux régimes : si la mesure ν a un moment d'ordre $\alpha/2$, alors la limite est $(R_t^c)_{t\geq 0}$. Si ce n'est pas le cas, la limite est $(R_t^{\mathrm{d}})_{t\geq 0}$.

Le travail de thèse consistera donc à :

(a) Montrer que pour le modèle cinétique de Fokker-Planck réfléchi dans un domaine fortement convexe, si $\beta \in (d, 4+d)$ et si la mesure de réflexion ν possède un moment d'ordre $\alpha/2$, alors le processus limite est $(R_t^c)_{t\geq 0}$, construit dans [4], ou une variation de ce processus. On souligne que le modèle cinétique de Fokker-Planck est plus difficile à étudier que le modèle de scattering. En effet, ce dernier est très proche d'un modèle de marches aléatoires réfléchies, ce qui permet une étude fine des temps de retour au bord du domaine. Ceci est assez important pour ce genre de problèmes. Il faudra donc trouver de nouveaux outils permettant de quantifier ces temps de retour pour le modèle de Fokker-Planck.

(b) On pourrait ensuite modifier le mécanisme de réflexion, et considérer par exemple une réflexion mixte, qui alterne aléatoirement entre réflexion diffusive et réflexion spéculaire (de type billard). Ces conditions de bord sont appelées conditions de Maxwell et sont issues de la théorie cinétique des gaz. Dans ce cas, il faudrait d'abord comprendre le processus limite, le construire, puis étudier la convergence.

(c) On souhaiterait aussi étudier ce qu'il se passe dans les autres phases. Tout d'abord, toujours pour $\beta \in (d, 4+d)$, mais lorsque ν n'a pas moment d'ordre $\alpha/2$, obtient-on le processus $(R_t^{\mathrm{d}})_{t\geq 0}$ à la limite, comme pour le modèle de scattering ? Ensuite, que se passe-t-il lorsque $\beta \notin (d, 4+d)$? Lorsque $\beta > 4+d$, on s'attend à obtenir un mouvement brownien réfléchi de manière normale, ce qui devrait faciliter l'étude. Mais lorsque $\beta \in (d-2, d)$, on ne sait pas construire le processus limite.

(d) Il serait aussi assez naturel de pousser l'étude des processus stables construits dans [4]. Ces processus possèdent-ils une unique mesure invariante ? Que peut-on dire de celle-ci sur le bord du domaine ? Y-a-t-il une convergence exponentielle vers l'équilibre ? On pourrait aussi s'intéresser aux propriétés de régularisation du semi-groupe associé (s'il est fortement fellerien), et à la quantification de cette dernière.

References

[1] E. Barkai, E. Aghion, and D.A. Kessler. From the area under the bessel excursion to anomalous diffusion of cold atoms. *Physical Review X*, 4(2):021036, 2014.

[2] N. Ben Abdallah, A. Mellet, and M. Puel. Anomalous diffusion limit for kinetic equations with degenerate collision frequency. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 21(11):2249–2262, 2011.

[3] L. Béthencourt. Fractional diffusion limit for a kinetic Fokker-Planck equation with diffusive boundary conditions in the half-line. *Ann. Probab.*, 52(5):1713–1757, 2024.

[4] L. Béthencourt and N. Fournier. Fractional diffusion in convex domains and reflected isotropic stable processes. *arXiv preprint arXiv:2503.13071*, 2025.

[5] E. Bouin and C. Mouhot. Quantitative fluid approximation in transport theory: a unified approach. *Probab. Math. Phys.*, 3(3):491–542, 2022.

[6] Y. Castin, J. Dalibard, and C. Cohen-Tannoudji. The limits of sisyphus cooling in light induced kinetic effects on atoms, ions and molecules, edited by l. *Moi, S. Gozzini, and C. Gabbanini (ETS Editrice, Pisa, 1991)*, page 5.

[7] P. Cattiaux, E. Nasreddine, and M. Puel. Diffusion limit for kinetic Fokker-Planck equation with heavy tails equilibria: the critical case. *Kinet. Relat. Models*, 12(4):727–748, 2019.

[8] D. Dechicha and M. Puel. Fractional diffusion for Fokker-Planck equation with heavy tail equilibrium: an à la Koch spectral method in any dimension. *Asymptot. Anal.*, 136(2):79–132, 2024.

[9] Dahmane Dechicha. On the spectral problem and fractional diffusion limit for Fokker-Planck with(-out) drift and for a general heavy tail equilibrium. *J. Differential Equations*, 455:Paper No. 113971, 52, 2026.

[10] Dahmane Dechicha and Marjolaine Puel. Fractional diffusion for Fokker-Planck equation with heavy tail equilibrium: an à la Koch spectral method in any dimension. *Asymptot. Anal.*, 136(2):79–132, 2024.

[11] N. Fournier and C. Tardif. Anomalous diffusion for multi-dimensional critical kinetic Fokker-Planck equations. *Ann. Probab.*, 48(5):2359–2403, 2020.

[12] N. Fournier and C. Tardif. One Dimensional Critical Kinetic Fokker-Planck Equations, Bessel and Stable Processes. *Comm. Math. Phys.*, 381(1):143–173, 2021.

[13] T. Komorowski, S. Olla, and L. Ryzhik. Fractional diffusion limit for a kinetic equation with an interface. *Ann. Probab.*, 48(5):2290–2322, 2020.

[14] G. Lebeau and M. Puel. Diffusion approximation for Fokker Planck with heavy tail equilibria: a spectral method in dimension 1. *Comm. Math. Phys.*, 366(2):709–735, 2019.

[15] A. Mellet. Fractional diffusion limit for collisional kinetic equations: a moments method. *Indiana University Mathematics Journal*, pages 1333–1360, 2010.

[16] A. Mellet, S. Mischler, and C. Mouhot. Fractional diffusion limit for collisional kinetic equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 199(2):493–525, 2011.

[17] Y. Sagi, M. Brook, I. Almog, and N. Davidson. Observation of anomalous diffusion and fractional self-similarity in one dimension. *Physical review letters*, 108(9):093002, 2012.