

Titre du sujet : « Sur la K -théorie d'extensions de spectres faiblement ramifiées »

- Unité de recherche : LAGA
- Discipline : Mathématiques
- Direction de thèse : Christian AUSONI
- Contact : ausoni@math.univ-paris13.fr
- Domaine de recherche : Topologie algébrique
- Mots-clés : K -théorie algébrique, théorie de l'homotopie stable

Contexte

La K -théorie algébrique est un invariant important en topologie, en théorie des nombres ou en géométrie algébrique. Son calcul est difficile, mais est partiellement possible par exemple grâce au développement de la trace cyclotomique $K \rightarrow TC$ vers l'homologie cyclique (topologique), qui relève la trace de Bökstedt vers l'homologie de Hochschild (topologique). L'intérêt majeur de la trace cyclotomique est que l'homologie cyclique est calculable dans de nombreux exemples, et offre une excellente approximation de la K -théorie algébrique. Les théories de cohomologie motiviques fournissent un autre outil puissant pour l'étude de la K -théorie, de même que les filtrations motiviques [BMS19; HRW24] construites sur l'homologie de Hochschild topologique.

En parallèle, la théorie de l'homotopie stable s'est aussi considérablement développée avec l'essor des ∞ -catégories et de l'algèbre supérieure de Lurie. Le décalage chromatique (redshift) opéré par la K -théorie algébrique a fait l'objet de beaucoup d'études ces vingt dernières années, et l'interaction entre ces théories n'a cessé de se développer, conduisant par exemple à la réfutation de la Conjecture du Téléscope de Ravenel par Burklund, Hahhn, Levy et Schlanck [Bur+23], qui ont exhibé des contre-exemples à l'aide de la K -théorie algébrique. Ces développements récents soulignent l'utilité des calculs en K -théorie algébrique des spectres en anneau comme outil de détection de phénomènes chromatiques difficiles d'accès.

Projet

Hesselholt et Madsen [HM03] ont utilisé avec succès la géométrie logarithmique pour étudier la K -théorie algébrique des corps locaux et de leurs extensions, via la trace cyclotomique. Dans des travaux très récents, Rognes, Sagave et Schlichtkrull [RSS25] ont étendu ces techniques aux spectres en anneau E_k , et ont généralisé les suites de localisation correspondantes en homologie de Hochschild et en homologie cyclique. Récemment, en collaboration avec Bayindir et Moulinos [ABM23], nous avons construit de façon générale des extensions de spectres en anneau E_1 réalisant l'adjonction d'une racine n -ième d'une classe d'homotopie, avons étudié l'homologie de Hochschild topologique de l'extension obtenue dans le cas faiblement ramifié. La relation entre ces résultats et la théorie des extensions cyclotomiques chromatiques de Carmeli, Schlanck, Yanovski [CSY24] fait actuellement l'objet d'une collaboration avec Bayindir, Lundemo et Sagave.

L'objectif de ce projet est l'étude de ces différents invariants – l'homologie de Hochschild, l'homologie cyclique et la K -théorie algébrique – appliqués à des extensions de spectres en anneaux faiblement ramifiés obtenus par adjonction de racines. On s'intéressera particulièrement à la hauteur chromatique 2 ou 3 (dans

le cas (p)-local pour un premier p suffisamment grand), pour des anneaux correspondant à des troncations des spectres du cobordisme complexe MU ou BP , ou à des variantes du spectres des formes modulaires topologiques. Parmi les principaux outils qui permettront ce programme, on peut citer les suivants.

1. La filtration motivique sur l’homologie de Hochschild topologique en tant que filtration paire, telle que proposée par Hahn-Raksit-Wilson [HRW24], ainsi que l’homologie syntomique et prismatique;
2. Les méthodes logarithmiques fournies par [ABM23; RSS25], particulièrement adaptées aux extensions faiblement ramifiées;
3. La théorie de l’homotopie motivique et son application à ces invariants, comme par exemple illustré dans les travaux de Dundas, Hill, Ormsby et Østvær [Dun+24].

References

- [ABM23] Christian Ausoni, Haldun Özgür Bayindir, and Tasos Moulinos. *Adjunction of roots, algebraic K -theory and chromatic redshift*. 2023. arXiv: 2211.16929 [math.AT]. URL: <https://arxiv.org/abs/2211.16929>. to appear in Compos. Math.
- [BMS19] Bhargav Bhatt, Matthew Morrow, and Peter Scholze. “Topological Hochschild homology and integral p -adic Hodge theory”. English. In: *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* 129 (2019), pp. 199–310. DOI: 10.1007/s10240-019-00106-9.
- [Bur+23] Robert Burklund et al. *K -theoretic counterexamples to Ravenel’s telescope conjecture*. arXiv:2310.17459. 2023. URL: <https://arxiv.org/abs/2310.17459>.
- [CSY24] Shachar Carmeli, Tomer M Schlank, and Lior Yanovski. “Chromatic cyclotomic extensions”. In: *Geometry & Topology* 28.8 (Dec. 2024), pp. 3511–3564. DOI: 10.2140/gt.2024.28.3511. URL: <http://dx.doi.org/10.2140/gt.2024.28.3511>.
- [Dun+24] Bjørn Ian Dundas et al. “Hochschild homology of mod- p motivic cohomology over algebraically closed fields”. English. In: *Commun. Am. Math. Soc.* 4 (2024), pp. 578–606. DOI: 10.1090/cams/36. URL: <hdl.handle.net/10852/113976>.
- [HM03] Lars Hesselholt and Ib Madsen. “On the K -theory of local fields”. English. In: *Ann. Math. (2)* 158.1 (2003), pp. 1–113. DOI: 10.4007/annals.2003.158.1.
- [HRW24] Jeremy Hahn, Arpon Raksit, and Dylan Wilson. *A motivic filtration on the topological cyclic homology of commutative ring spectra*. arXiv:2206.11208. 2024. arXiv: 2206.11208 [math.KT]. URL: <https://arxiv.org/abs/2206.11208>.
- [RSS25] John Rognes, Steffen Sagave, and Christian Schlichtkrull. *Localization sequences for logarithmic topological cyclic homology*. Preprint, arXiv:2506.08492 [math.AT] (2025). 2025. URL: <https://arxiv.org/abs/2506.08492>.