École doctorale de l'Institut Galilée
99 avenue JB Clément
directeur-ecoledoc-galilee@univ-paris13.fr
01 49 40 20 65
93430 Villetaneuse

Le lemme d'Ihara de Clozel-Harris-Taylor en dimension supérieure et l'approche évanescente pour la cohomologie des variétés de Kottwitz en signature $(1, n-1) \times (n-1, 1)$ *: applications*

Unité de recherche : Institut Galilée, LAGA
Discipline : Maths

Sujet de thèse proposé en codirection avec
— BOYER Pascal (50%), Université Sorbonne Paris Nord : boyer@math.univ-paris13.fr
— et NGUYEN KieuHieu (50%), Université de Versailles kieu-hieu.nguyen@uvsq.fr
La thèse s'effectuera
— au LAGA (Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539)
— et au LMV (Laboratoire de Mathématiques de Versailles UMR 8100).
Des missions d'enseignement pourront être proposées notamment en M1 en anglais au département de maths de l'Institut Galilée

Domaine de recherche : Géométrie arithmétique, programme de Langlands
Mots clés : Variétés de Shimura, représentations automorphes, cohomologie étale, groupes réductifs

Présentation générale du sujet

La théorie de Galois est un pont entre, d'une part, les extensions de corps et, d'autre part, la théorie des groupes. L'une des grandes réalisations de la première moitié du XXe siècle a été la compréhension du quotient abélien maximal des groupes de Galois. Dans les années 70, Langlands a initié une vaste généralisation pour comprendre, entre autre, la partie non commutative, l'un des angles de sa philosophie connue sous le nom de programme de Langlands, consistant à utiliser des fonctions analytiques L attachées aux différents objets qui entrent dans le tableau d'ensemble : représentations de Galois, représentations automorphes, motifs. Depuis 30 ans, il y a eu une multitude de nouveaux résultats spectaculaires, avec en particulier les médailles Fields de L. Lafforgue, B.C. Ngo, P. Scholze et des prix prestigieux notamment de R. Taylor, V. Lafforgue, D. Gaitsgory et bien d'autres sans oublier bien entendu A. Wiles qui a prouvé le grand théorème de Fermat en utilisant certains des ingrédients introduits dans le programme de Langlands.

Plusieurs membres de l'équipe d'arithmétique du LAGA se consacrent au programme de Langlands, plus précisément à son aspect géométrique et notamment sur l'incarnation géométrique de la correspondance locale et globale de Langlands à travers la cohomologie des espaces de Lubin-Tate et des variétés de Shimura. Parmi les membres de l'équipe d'Algèbre et

Géométrie du LMV, on compte parmi les meilleurs experts de la théorie des représentations des groupes réductifs notamment à travers la théorie des types.

Description du sujet de thèse

Dans la méthode de Taylor-Wiles pour GL_2, le lemme d'Ihara est l'ingrédient essentiel pour étendre des résultats du type $R = T$ du cas minimal en niveau supérieur. Il s'exprime classiquement comme l'injectivité d'une application entre le carré d'un H^1 de niveau Γ vers le H^1 de niveau $\Gamma' = \Gamma \cap \Gamma_0(p)$.

Dans leur travail sur la conjecture de Sato-Tate, Clozel Harris et Taylor en ont proposé une version pour GL_n ou plus précisément pour des algèbres à division compactes modulo leur centre. Leur énoncé conjectural affirme que les sous-représentations irréductibles de l'ensemble des formes automorphes sur ce groupe, sont localement génériques.

Afin d'avoir une preuve sans restriction de la conjecture de Sato-Tate, R. Taylor a ensuite proposé une stratégie pour contourner cette version conjecturale du lemme d'Ihara mais pour autant tout résultat autour de ce lemme aura des applications arithmétiques importantes notamment sur les valeurs spéciales de certaines fonctions L ainsi que des versions $R = T$ alors que la méthode Ihara's avoidance de R. Taylor ne fournit que des isomorphismes de leurs quotients réduits.

La stratégie usuelle pour attaquer ce genre de questions consiste à géométriser ces espaces de fonctions et la première étape est transférer la question à des algèbres à division non compacte modulo leur centre de sorte que leur variété de Shimura dit de type Kottwitz, soit de dimension strictement positive. Le problème revient alors à étudier les groupes de cohomologie de ces variétés de Shimura.

Plusieurs approches sont à ce jour disponibles.

a) La plus ancienne dit des cycles proches, consiste à étudier le faisceau pervers des cycles proches en une place décomposée, le principe étant de couper ce complexe en morceaux plus simples dont la cohomologie peut être calculée et de reconstruire toute la cohomologie de la variété de Shimura à travers une suite spectrale.

Ce travail a été réalisé par P. Boyer dans le cas très particulier des variétés de Shimura dites de Kottwitz-Harris-Taylor qui sont de signature $(1, n-1)$: [Boy09] et [Boy10]. Dans cette situation simple, on peut tout calculer à la fois les constituants irréductibles du complexe des cycles proches, leurs groupes de cohomologie et les suites spectrales associées, pour les coefficients $\mathbb{Q}_l$, $\mathbb{Z}_l$ et $\mathbb{F}_l$. En application P. Boyer prouve alors le lemme d'Ihara dans le cas banal [Boy22] et le cas limite classique [Boy25], moyennant le fait qu'au départ on choisisse l'algèbre à division compacte modulo le centre de sorte qu'on puisse se transporter dans la situation de Harris-Taylor.

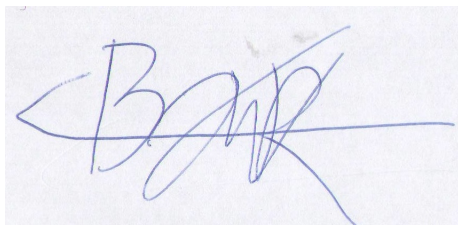
b) Une autre approche plus récente consiste, suivant des idées de P. Scholze, d'utiliser le morphisme des périodes et la propriété perfectoide de la tour de Shimura. Récemment Xiangqian Yang, en suivant cette stratégie, a obtenu, sans condition sur l'algèbre à division de départ, le cas banal du lemme d'Ihara. L'ingrédient essentiel consiste à étudier la géométrie du champ des paramètres de Langlands locaux unipotents.

Le but de cette thèse serait dans un premier temps de reprendre les résultats obtenus par P. Boyer pour les variétés de Shimura de signature $(1, n-1) \times (n-1, 1)$ afin d'enlever la restriction sur l'algèbre à division compacte modulo le centre. A priori la situation devrait ressembler à une structure produit du cas de signature $(1, n-1)$.

Dans un deuxième temps, on propose de regarder l'approche morphisme des périodes et voir si, le cas limite classique, pourrait donner des informations sur le champs des paramètres locaux de Langlands : thématique dont KieuHieu Nguyen est un expert [Ngu25]. Une autre piste pourrait être de regarder les liens entre ces résultats de type théorie des représentations avec ceux de types cohomologiques obtenus par Liang et ses coauteurs.

Enfin une question très intéressante serait de regarder le cas inerte : dans le cas Harris-Taylor, P. Boyer et J. Muller développent un programme permettant de traiter les cas unipotents. Il devrait être possible d'étendre leur approche dans le cas de signature $(1, n-1) \times (n-1, 1)$ avec des applications à la cohomologie de certaines variétés de Deligne-Lusztig.

BOYER Pascal



Références

[Boy09] P. Boyer, *Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples*, Invent. Math. **177** (2009), no. 2, 239–280. MR MR2511742

[Boy10] ———, *Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications*, Compositio **146** (2010), no. 2, 367–403.

[Boy22] ———, *Ihara's lemma and level rising in higher dimension*, Journal of the Inst. Math. of Jussieu **21** (2022), 1701–1726.

[Boy23b] ———, *La cohomologie des espaces de Lubin-Tate est libre*, Duke Math. Journal (june 2023), 1531–1622.

[Boy25] ———, *Ihara's lemma for GL_n : the limit case*, preprint 2025

[Ngu25] ———, *Categorical local Langlands and torsion classes of some Shimura varieties*, preprint 2025

[Cara12] ———, *Local-global compatibility and the action of monodromy on nearby cycles*, Duke Mathematical Journal 2012, volume 161, number 12, pages 2311 – 2413.