École doctorale de l'Institut Galilée
99 avenue JB Clément
directeur-ecoledoc-galilee@univ-paris13.fr
01 49 40 20 65
93430 Villetaneuse

Théorie géométrique des représentations modulaires dans la géométrisation du programme de Langlands

Unité de recherche : Institut Galilée, LAGA
Discipline : Maths

Sujet de thèse proposé par
— LOURENÇO João (100%), Université Sorbonne Paris Nord : lourenco@math.univ-paris13.fr
La thèse s'effectuera
— au LAGA (Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539).
Des missions d'enseignement pourront être proposées notamment en M1 au département de maths de l'Institut Galilée.

Domaine de recherche : Géométrie arithmétique, programme de Langlands, théorie géométrique des représentations
Mots clés : Représentations modulaires, grassmannienne affine, géométrisation de Langlands, faisceaux pervers, équivalence de Satake géométrique

1. Correspondance de Langlands locale

Dans cette section, on discute de la correspondance de Langlands sur un corps local sans invoquer d'effort de géométrisation ou de catégorification.

1.1. Origines arithmétiques en dimension ≤ 2.

Si l'on souhaite chercher les origines du programme de Langlands, on doit commencer par l'étude des solutions en congruences de formes quadratiques, et notamment la réciprocité quadratique de Gauss. Près d'un siècle de recherches intensives sur les généralisations aux extensions finies de degré supérieur à 2 a abouti à la loi de réciprocité d'Artin, décrivant l'abélianisation du groupe de Galois en termes du groupe des classes d'idèles, selon la formulation adélique de Chevalley. Ici, on voit déjà l'importance des phénomènes de compatibilité locale-globale.

Pour accéder à la partie non abélienne de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$, on doit passer aux représentations de dimension > 1 ; il est donc naturel de commencer par la dimension 2. Du côté automorphe, on dispose des formes modulaires f sur le demi-plan de Poincaré $\mathscr{H}$, étudiées par Hecke. Du côté galoisien, la cohomologie étale des courbes elliptiques fournit des représentations galoisiennes. Le lien profond entre ces objets a été conjecturé par Taniyama–Shimura, établi par Taylor–Wiles dans le cas semi-stable, et a acquis une notoriété mondiale en fournissant une preuve du dernier théorème de Fermat.

1.2. **Formulation de la correspondance locale.** Le programme de Langlands vise à généraliser la dualité des exemples arithmétiques précédents à des groupes réductifs G quelconques. Il est assez délicat de formuler une correspondance globale exhaustive, ce qui a fait l'objet des travaux de Clozel ou Buzzard–Gee. Cependant, l'un des thèmes les plus répandus est d'imposer des contraintes locales, en termes par exemple de paramètres de Satake sur les places non ramifiées. Sur un corps p-adique F, la correspondance est plus précise : on cherche une application à fibres finies entre l'ensemble des représentations ℓ-adiques lisses irréductibles de $G(F)$ et les classes de conjugaison de L-paramètres du groupe de Weil de F, lesquels sont définis en termes de 1-cocycles ℓ-adiques du groupe dual $G^\vee$ de G. Cette application devrait satisfaire à plusieurs compatibilités naturelles, comme par exemple avec l'induction parabolique. À semi-simplification près, une telle application a été construite pour tout G dans les travaux de Fargues–Scholze et Genestier–Lafforgue (pour les corps de séries de Laurent) de façon géométrique. Cependant, la plupart des progrès pour les groupes classiques ont été accomplis en utilisant des méthodes globales liées aux variétés de Shimura et en étudiant leurs uniformisations p-adiques ; voir, par exemple, les travaux de Harris–Taylor construisant la correspondance pour GL_n ou ceux de Caraiani–Scholze sur la compatibilité locale-globale.

2. L'histoire sur les corps de fonctions

Sur un corps de fonctions, le programme de Langlands peut s'appuyer sur la géométrie algébrique en caractéristique positive. Il se géométrise via le champ de modules Bun_G des G-fibrés sur une courbe X définie sur un corps fini. Les formes automorphes y sont interprétées comme des faisceaux ℓ-adiques, et les opérateurs de Hecke classiques sont remplacés par des correspondances sur le champ de Hecke Hk_G classifiant les modifications de G-torseurs. L'autre objet géométrique fondamental est constitué par les champs de chtoucas, qui jouent un rôle analogue à celui des variétés de Shimura dans le programme de Langlands sur les corps de nombres. Leur cohomologie a permis à L. Lafforgue de construire la semi-simplifiée de la correspondance de Langlands en termes de ses opérateurs d'excursion.

Parallèlement, l'étude des faisceaux ℓ-adiques sur ces champs algébriques nous mène également à la théorie géométrique des représentations, dont je suis expert. Par exemple, un résultat fondamental de Mirković–Vilonen, l'équivalence de Satake géométrique, identifie la catégorie des faisceaux pervers équivariants sur la grassmannienne affine Gr_G à la catégorie des représentations du groupe dual $G^\vee$. Ce genre d'approche de la théorie des représentations mod ℓ devrait jouer un rôle essentiel dans la thèse du futur doctorant. De plus, j'ai travaillé de manière approfondie sur l'équivalence de Bezrukavnikov, qui intervient dans la géométrisation à la Zhu grâce à la trace catégorique du Frobenius, comme je l'expliquerai plus tard.

Il existe aussi une vaste école fondée par Beilinson, Drinfeld et surtout Gaitsgory au cours de cette dernière décennie, qui se dédie à l'étude du Langlands géométrique. Ils ont introduit plusieurs innovations dans le formalisme des faisceaux sur des champs algébriques (souvent de type infini) impliquant des ∞-catégories qui servent d'inspiration aux travaux plus récents sur les corps p-adiques. Récemment, une preuve de la correspondance catégorique de Langlands globale non ramifiée a été rédigée par un large groupe de chercheurs, parmi lesquels Gaitsgory, Raskin, etc. Ce n'est pas une coïncidence si ce dernier en parlera lors des leçons Hadamard de cette année.

3. Géométrisation p-adique

Dans cette section, j'aborderai les différentes catégorifications des ensembles intervenant dans la correspondance de Langlands locale.

3.1. **Le côté automorphe par Fargues–Scholze.** Les travaux récents de Fargues–Scholze transposent les méthodes du Langlands géométrique au cadre p-adique en utilisant la courbe de Fargues–Fontaine. Cette courbe, construite via la théorie des espaces perfectoïdes et le basculement de Scholze, permet de définir un champ modulaire Bun_G dont les points géométriques correspondent à l'ensemble $B(G)$ que Kottwitz avait introduit pour étudier la réduction des variétés de Shimura. Le côté automorphe est alors remplacé par la catégorie $\mathcal{D}(\mathrm{Bun}_G)$ des faisceaux ℓ-adiques sur Bun_G.

Par exemple, ce cadre a permis à Fargues–Scholze de construire une équivalence de Satake pour les groupes p-adiques, de formuler une conjecture précise sur l'équivalence catégorique de Langlands locale et de construire l'action spectrale des faisceaux parfaits du côté galoisien sur le côté automorphe. En particulier, les opérateurs d'excursion à la Lafforgue redonnent la correspondance de Langlands locale après semi-simplification. Les avantages principaux de la théorie de Fargues–Scholze sont de permettre une meilleure étude des opérateurs de Hecke via la technique de fusion, ainsi que de l'induction et de la restriction paraboliques via les termes constants et les séries d'Eisenstein, comme dans les travaux de Hamann–Hansen–Scholze.

3.2. **Le côté spectral.** Le côté galoisien est remplacé, dans le programme de géométrisation de Langlands locale, par le champ classifiant Par_G des L-paramètres sur les anneaux ℓ-adiques. Ce champ a été étudié en profondeur par plusieurs groupes d'auteurs, tels que Fargues–Scholze, Zhu, et Dat–Helm–Kurinczuk–Moss. Il est assez singulier et sa structure locale est gouvernée par des variétés de Vogan, qui généralisent les cônes nilpotents et sont d'usage répandu en théorie géométrique des représentations.

C'est pourquoi la catégorie de faisceaux à considérer est celle des faisceaux ind-cohérents $\mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_G)$ plutôt que simplement quasi-cohérents. On note que cette catégorie est reliée à celle des représentations du groupe dual à travers le Satake géométrique, ce qui explique que son comportement soit beaucoup plus difficile à maîtriser modulo ℓ. Les problèmes de la théorie des représentations modulaires apparaissent fréquemment lors du travail avec la variante mod ℓ de $\mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_G)$. En fait, l'un de mes projets est relié à certaines restrictions de modules basculants que l'on retrouve aussi dans le livre de Fargues–Scholze. Il serait naturel, pour le projet de thèse du futur doctorant, d'étudier en profondeur les difficultés additionnelles qui surgissent lorsqu'on travaille avec des coefficients modulaires et de tenter de clarifier l'état actuel de la littérature.

3.3. **Le côté automorphe par Zhu.** Parallèlement, Xinwen Zhu a proposé de géométriser la correspondance de Langlands locale à l'aide du champ schématique Isoc_G classifiant les G-isocristaux sur F, restant ainsi dans le cadre de la géométrie algébrique.

Cependant, au vu de la pathologie de ce champ, Zhu est contraint de construire sa catégorie de faisceaux sur Isoc_G en utilisant la descente propre via des présentations par des champs de chtoucas d'Iwahori ind-placides. L'avantage de son cadre est que la "patte" des modifications est constante, ce qui donne un point fixe par Frobenius et permet ainsi de prendre sa trace catégorique.

Cela ramène le problème de trouver une équivalence avec le côté automorphe à une assertion similaire impliquant les champs de Hecke à profondeur 0 du côté automorphe et ceux de Steinberg du côté spectral. Cela récupère exactement l'équivalence de Bezrukavnikov sur laquelle j'ai travaillé. Comprendre les opérateurs de Hecke devient plus complexe dans ce cadre, car il est nécessaire d'utiliser les cycles proches. Il en va de même pour l'induction parabolique, où il faut travailler avec la trace catégorique d'un certain bimodule de Hecke. Cependant, l'astuce de la trace catégorique a permis à Zhu de démontrer la partie de profondeur 0 de l'équivalence catégorique de Langlands locale, ce qui est remarquable.

3.4. **La comparaison entre Fargues–Scholze et Zhu.** Dans un travail commun avec Gleason–Hamann–Ivanov–Zou, nous construisons une équivalence à coefficients modulaires entre $\mathrm{Shv}(\mathrm{Isoc}_G)$ et $\mathcal{D}(\mathrm{Bun}_G)$. La stratégie consiste à utiliser un foncteur d'analytification surconvergent b^* combiné à une poussée en avant ! le long de l'application naturelle reliant l'analytification surconvergente $\mathrm{Isoc}_G^\dagger$ à Bun_G. La limitation des coefficients devrait être levée prochainement en travaillant avec les motifs de Berkovich sur les arc-champs de Scholze, ce qui permettrait aussi de s'affranchir de la dépendance en ℓ.

L'une des questions qui sera résolue à l'avenir est de montrer que notre équivalence est compatible avec l'action spectrale des deux côtés : en caractéristique égale, cela a été construit à l'aide des cycles proches par Étève–Gaitsgory–Genestier–Lafforgue ; en caractéristique mixte, cette action n'existe que dans la partie de profondeur 0 par transport de structure via l'équivalence de Bezrukavnikov, et se trouve donc intimement liée à ma recherche.

L'autre question pointue qui devrait être traitée est d'établir le dictionnaire entre l'induction parabolique du côté automorphe de Fargues–Scholze et celui de Zhu. Ce sera le problème principal de la thèse du futur doctorant. La stratégie impliquera l'étude des diagrammes de chtoucas et de leur comportement par rapport à l'induction parabolique. Il est fort probable qu'il doive se familiariser avec les espaces de Zastava, apparus dans le calcul des séries d'Eisenstein, pour maîtriser la compactification de Bun_P pour un parabolique et comprendre à quel type d'objet cela correspond du côté schématique.