

## Titre du sujet : Polymères dirigés, particules en interactions et EDPs stochastiques

- Unité de recherche : Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539
- Discipline : Mathématiques
- Direction de thèse : Quentin Berger
- Contact : [quentin.berger@math.univ-paris13.fr](mailto:quentin.berger@math.univ-paris13.fr)
- Domaine de recherche : Probabilités, Physique Mathématique.
- Mots-clés : marches aléatoires, processus stochastiques, interactions singulières.

### Description scientifique du sujet de thèse

Le sujet de thèse se situe dans le domaine des probabilités et de la physique mathématique. Il s'intéresse en particulier au lien entre mécanique statistique et EDPs stochastiques. L'idée est d'étudier certaines propriétés fines d'un modèle qui a été beaucoup étudié ces dernières années, appelé *polymère dirigé en environnement aléatoire*. Ce modèle peut être vu comme une version discrétisée de l'équation de la chaleur stochastique, qui est une EDP stochastique *singulière*. La dimension  $d = 2$  est critique pour cette EDP stochastique et une procédure subtile de renormalisation doit être effectuée pour lui donner un sens. Le modèle de polymère dirigé a alors été crucial dans une percée récente de Caravenna, Sun et Zygouras [1] : en prenant les paramètres dans un régime critique bien précis, les fonctions de partitions du modèle convergent vers un objet limite non-dégénéré, appelé *critical 2d Stochastic Heat Flow* (SHF).

Le but général de la thèse sera d'étudier quelques propriétés des polymères dirigés et du SHF, et notamment la structure de leurs moments. Il s'avère que l'on peut relier les moments du polymère dirigé à un système de particules en interactions : plus précisément, le moment d'ordre  $k$  du modèle correspond à  $k$  marches aléatoires (appelées particules) récompensées lorsqu'elles entrent en collision. Dans un bon régime de paramètres, la limite d'échelle correspond à considérer  $k$  particules browniennes dans  $\mathbb{R}^2$  qui interagissent lors de leurs collisions, ce qui est connu sous le nom de *gaz de Bose-delta*. Notons qu'il s'agit d'une interaction singulière car  $k$  particules browniennes dans  $\mathbb{R}^2$  ne rentrent jamais en collision : cependant, une procédure d'approximation, par exemple par des marches aléatoires, permet d'y donner un sens. Soulignons que le gaz de Bose-delta a connu un net regain d'intérêt ces dernières années, voir notamment [2].

Nous proposons ainsi dans la thèse d'étudier quelques questions fondamentales concernant les limites d'échelles du modèle de polymère dirigé et du système de particules associé à ses moments.

- (a) *Universalité du gaz de Bose-delta et du SHF.* Pour l'instant, seul le cas d'un polymère dirigé basé sur la marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}^2$  a été étudié. Considérer le cas d'une marche générale permettrait de sonder l'universalité des limites d'échelle et permettrait de clarifier le rôle des différents paramètres dans la procédure d'approximation. Plusieurs étapes sont envisagées :
- Montrer la convergence du moment d'ordre  $k$  du polymère dirigé vers le gaz de Bose-delta à  $k$  particules (on commencera par bien comprendre le cas à  $k = 2$  particules) ;
  - Montrer la convergence vers le SHF du polymère dirigé avec marche aléatoire générale.
- (b) *Désordre corrélé et interactions à longue portée.* Si l'environnement aléatoire possède des corrélations spatiales à longue portée, les moments du polymère dirigé correspondent à des particules possédant

des interactions à longue portée (au lieu d’une interaction “delta”). L’un des buts serait de comprendre l’effet de corrélations “critiques” sur le modèle. Plusieurs étapes sont envisagées :

(i) Identifier précisément le régime critique pour les paramètres du modèle (soulignons que le point critique a été identifié récemment, dans [3]) ;

(ii) Construire un gaz de Bose avec interactions singulières en  $|x|^{-2}$ , et montrer la convergence des moments d’ordre  $k$  du polymère dirigé vers cet objet, à commencer par le cas  $k = 2$  ;

(iii) Montrer la convergence du polymère dirigé vers un nouvel objet, qui serait le SHF avec corrélations critiques.

(c) *Structure des gaz de Bose multi-particules.* Le gaz de Bose-delta a été construit pour un nombre fixé  $k$  (fini) de particules, voir [2]. Une question naturelle que l’on pourra aussi étudier est de savoir si l’on peut définir le gaz de Bose-delta en tant que “flot”. Cela permettrait de considérer une infinité de particules simultanément, partant de tous les points de  $\mathbb{R}^2$ , et donnerait une structure extrêmement utile pour l’étude du gaz de delta-Bose. La même question se pose aussi pour le gaz de Bose avec interactions à longue portée.

## Références

- [1] F. Caravenna, R. Sun, and N. Zygouras. The critical 2d Stochastic Heat Flow. *Invent. Math.*, 233(1) :325–460, 2023.
- [2] Y.-T. Chen. Stochastic motions of the two-dimensional many-body delta-Bose gas, I, II, III, IV. *série d’articles, arXiv*, 2024.
- [3] C. Cosco, F. Cottini, and A. Donadini. A central limit theorem for two-dimensional directed polymers with critical spatial correlation. *arXiv :2509.16694*, 2025.