ECOLE DOCTORALE GALILÉE, UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS NORD

Titre du sujet: Chaos multiplicatif et recouvrements aléatoires poissoniens sur les espaces métriques.

- Unité de recherche: LAGA, UMR CNRS 7539
- Discipline: Mathématiques
- Direction de thèse: Julien Barral
- Contact: barral@math.univ-paris13.fr
- Domaines de Recherche: Géométrie fractale, probabilités, et système de dynamiques théorie ergodique.
- Mots clés: dimension de Hausdorff, chaos multiplicatif, recouvrements aléatoires, analyse multifractale, formalisme thermodynamique.

Résumé du sujet de thèse. Etant donné un espace métrique (X, d), une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X et une suite de rayons strictement positifs $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est naturel de se poser les questions suivantes:

(1) A-t-on $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, r_n)$? Et dans ce cas chaque point est-il recouvert une infinité de fois, i.e. a-t-on $X = \limsup_{n\to\infty} B(x_n, r_n)$? Il faut bien sûr pour que cette seconde égalité ait lieu que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans (X, d), et on peut compléter la question en demandant dans le cas où $X \neq \limsup_{n\to\infty} B(x_n, r_n)$ ce que vaut $\dim_H(\limsup_{n\to\infty} B(x_n, r_n))$, où $\dim_H$ désigne la dimension de Hausdorff dans la métrique fixée. C'est une question d'approximation métrique, bien connue et très étudiée notamment en approximation diophantienne dans les espaces euclidiens. Notons qu'on peut poser les mêmes questions en remplaçant les boules par d'autres objets contenant les x_n et dont les diamètres tendent vers 0.

(2) Si $F \in \{X \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, r_n), X \setminus \limsup_{n\to\infty} B(x_n, r_n)\}$ est non vide, que peut-on dire de $\dim_H F$?

(3) Considérant pour $x \in X$ et $\varepsilon > 0$ le nombre $N_\varepsilon(x) = \sum_{n:\, r_n\geq\varepsilon} \mathbf{1}_{B(x_n,r_n)}(x)$ de boules $B(x_n, r_n)$ de rayon au moins égal à ε ayant recouvert un point x, peut-on décrire aymptotiquement $N_\varepsilon(x)$, sinon individuellement pour chaque x, au travers d'une fonction de référence $\Lambda_\varepsilon : (0, \infty) \mapsto (0, +\infty)$ telle que pour α dans un sous-intervalle non trivial de $\mathbb{R}_+$ les ensembles

$$\underline{E}(\alpha) = \left\{ x \in X : \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \frac{N_\varepsilon(x)}{\Lambda(\varepsilon)} = \alpha \right\}, \overline{E}(\alpha) = \left\{ x \in X : \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \frac{N_\varepsilon(x)}{\Lambda(\varepsilon)} = \alpha \right\},$$

voire l'ensemble $E(\alpha) = \underline{E}(\alpha) \cap \overline{E}(\alpha)$, soient non vides, et qu'on puisse déterminer pour $F \in \{\underline{E}, \overline{E}, E\}$ le spectre multifractal

$$\sigma_F : \alpha \in \mathbb{R}_+ \mapsto \dim_H F(\alpha)?$$

Un tel spectre donne une description géométrique précise de l'hétérogénéité éventuelle avec laquelle les points de X sont recouverts au cours du processus de recouvrement.

Une situation aléatoire naturelle ayant suscité un grand intérêt, et pour laquelle les réponses aux questions précédentes sont connues (cf. [5, 2, 3]) est celle où $X = \mathbb{R}$ muni de sa métrique standard. On tire une suite aléatoire $(x_n, r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le demi-plan supérieur selon une intensité de Poisson de la forme $\mathrm{Leb} \otimes \nu$, où ν est une mesure de Radon sur $(0, \infty)$ de masse infinie mais telle que $\nu(1, +\infty) < \infty$. S'agissant du problème (3), posant $\Lambda(\varepsilon) = \mathbb{E}(N_\varepsilon(x))$, qui ne dépend pas de x, on observe alors essentiellement trois régimes pour le spectre σ_E selon la valeur de $\gamma = \limsup_{\varepsilon\to+\infty} \frac{\Lambda(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$. Si $\gamma = 0$ et $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \Lambda(\varepsilon) = +\infty$, alors presque sûrement tous les ensembles $E(\alpha)$ sont de dimension de Hausdorff égale à 1, si $\gamma \in (0, +\infty)$ alors il existe une fonction f continue sur $[0, +\infty)$, analytique sur $(0, +\infty)$, unimodale et strictement concave telle que presque sûrement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ on a $\dim_H E(\alpha) = f(\alpha)$ si $f(\alpha) \geq 0$ et $E(\alpha) = \emptyset$ sinon, et si $\gamma = +\infty$, alors $E(\alpha = 1) = X$ (le recouvrement est asymptotiquement uniforme; la fréquence de recouvrement $\alpha = 1$ que l'on détecte Lebesgue presque partout quand $\gamma < +\infty$ est désormais partout la même).

Dans cette thèse, on se propose d'étudier le problème (3) dans le cadre de deux autres espaces métriques.
(1) Pour les recouvrements poissoniens du premier groupe de Heisenberg $\mathbb{H} = H_1(\mathbb{R})$ muni de sa métrique de Carnot-Carathéodory notée d, quand le processus de Poisson a une intensité de la forme $\mathrm{Leb} \otimes \nu$, comme ci-dessus, où cette fois la mesure de Lebesgue est celle de $\mathbb{R}^3$. Le traitement du cas du recouvrement de $\mathbb{R}$ fait penser que certaines mesures aléatoires obtenues comme limites de martingales de type chaos multiplicatif poissonien doivent y jouer un rôle fondamental pour estimer les dimensions de Hausdorff des ensembles $F(\alpha)$,

$F \in \{E, \underline{E}, \overline{E}\}$. On commencera donc par développer la théorie dimensionnelle de ce type de mesure, en commençant par caractériser sous quelles conditions les martingales que nous évoquons convergent faiblement vers une mesure non trivial avec probabilité positive. Pour le problème des fréquences de recouvrement, on s'attend à ce que les mesures ν qui jouent un rôle charnière soient celles de la forme $\nu(\mathrm{d}r) = \gamma\frac{\mathrm{d}r}{r^5}$, qui sont sont telles que Leb $\otimes\, \nu$ est invariante par les dilatations centrées en des points de $\mathbb{H} \times \{0\}$ (les questions (1) et (2) ont été étudiées pour ces intensités dans [4]).

Une question particulièrement intéressante dans le contexte du groupe de Heisenberg est celle de la comparaison des dimensions de Hausdorff des ensembles aléatoires précédemment considérés avec leur dimension lorsque $\mathbb{H}$ est muni de sa métrique euclidienne. On sait qu'il existe deux fonctions continues affines par morceaux ϕ_1 et ϕ_2 de $[0, 4]$ dans $[0, 3]$ (rappelons que 4 est la dimension de Hausdorff de $\mathbb{H}$ sous la métrique d), telles que pour tout sous-ensemble E de $\mathbb{H}$, si $\dim_H^e(E)$ désigne sa dimension euclidienne, alors $\phi_1(\dim_H E) \leq \dim_H^e(E) \leq \phi_2(\dim_H E)$, et ces bornes sont optimales [1, 6]. Que peut-on dire de plus précis pour les ensembles $E(\alpha)$?

(2) Pour les recouvrements poissoniens d'un répulseur conforme X dans $\mathbb{R}^d$ euclidien (dont la géométrie est très différente de celle de $(\mathbb{H}, d)$), l'intensité du processus de Poisson étant de la forme $Q \otimes \nu$, où Q est l'unique mesure de probabilité Alhfors régulière, et ergodique pour la transformation expansive à laquelle le répulseur est associée (les questions (1) et (2) ont été étudiées quand $\nu(\mathrm{d}r) = \gamma\dfrac{\mathrm{d}r}{r^{D+1}}$ dans [7], D est la dimension de Q et de X). Un des points qui rend la situation subtile et particulièrement intéressante est qu'en général $\mathbb{E}(N_\varepsilon(x))$ dépend de x. Ici encore on développera le chaos multiplicatif poissonien comme outil central.

References

[1] Z. Balogh, M. Rickly, F. Serra Cassano, Comparison with respect to the Euclidean and the Heisenberg metric, Publ. Mat. (2003), 237-259.

[2] J. Barral, Poissonian products of random weights: uniform convergence and related measures, Rev. Mat. Iberoamericana, 19 (2003): 813-856.

[3] J. Barral, A.-H. Fan, Covering numbers of different points in Dvoretzky covering, Bull. Sci. Math., 129 (2005), 275-317.

[4] L. Dufloux, V. Suomala, Projections of Poisson cut-outs in the Heisenberg group and the visual 3-sphere, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 2022 , 172 (2022), 197-230.

[5] J.-P. Kahane, Recouvrements aléatoires et théorie du potentiel, Coll. Math., 60-61 (1990), 287-411.

[6] P. Mattila, L. Venieri, A comparison of Euclidean and Heisenberg Hausdorff measures, Revista Matematica Iberoamericana, (2019) vol. 35, no. 5, 1485-1500.

[7] T. Ojala, V. Suomala, M. Wu, Random cutout sets with spatially inhomogeneous intensities, Israël J. Math., 220 (2017), 899-925.