

Titre du sujet : Catégories de modules sur les ultra-anneaux

- Unité de recherche : Laboratoire d'Informatique de Paris Nord (LIPN)
- Discipline : Informatique
- Direction de thèse : Damiano Mazza, coencadré par Morgan Rogers
- Contact : damiano.mazza@lipn.univ-paris13.fr
- Domaine de recherche : logique et complexité
- Mots-clés : logique catégorique, théorie des catégories, complexité descriptive

Contexte. Dans des travaux récents avec Baptiste Chanus et Morgan Rogers [CMR25], nous avons introduit des nouveaux objets algébriques appelés *ultra-anneaux*, généralisant à la fois les anneaux commutatifs et les catégories lextensives booléennes. Ces dernières sont connues en logique catégorique comme des contextes dans lesquels on peut donner une notion générale de modèle à des théories de la logique classique du premier ordre [Joh02,CLW93]. Les ultra-anneaux peuvent être présentés à travers un langage logico-algébrique dont les polynômes et la logique du premier ordre sont des cas particuliers. Cela permet de reformuler certaines caractérisations descriptives de classes de complexité [Imm99]. L'avantage est que l'on retrouve ainsi, de manière uniforme, des classes de complexité booléennes « traditionnelles » (comme RE, NP, P) et des classes algébriques formulées à travers le modèle de calcul de Blum, Shub et Smale [BSS89]. La formulation est uniforme dans le sens où elle est paramétrique en un corps \mathbb{K} : en choisissant $\mathbb{K} = \mathbb{F}_1$ (l'ultra-anneau initial, correspondant au « corps à un élément » [Dur07]) on obtient les classes booléennes ; en choisissant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on obtient les classes BSS correspondantes sur les nombres réels.

Objectifs. Les modules sur les anneaux commutatifs sont un outil essentiel, en particulier du point de vue géométrique consistant à associer à chaque anneau commutatif R son spectre $\text{Spec } R$. De ce point de vue, un R -module est la même chose qu'un *faisceau quasi-cohérent* sur $\text{Spec } R$, et la catégorie des R -modules définit R de manière univoque. De manière plus générale, pour une classe assez large de schémas X (les objets fondamentaux étudiés en géométrie algébrique) il est possible de reconstruire X à partir de sa catégorie des faisceaux quasi-cohérents $\mathbf{QCoh}(X)$ [Bra13].

Ce projet de thèse se pose comme objectif d'étudier la notion de module dans le cadre des ultra-anneaux. Nous avons déjà une définition permettant non seulement de retrouver la notion classique dans le cas des anneaux commutatifs, mais, pour tout schéma X , nous avons un ultra-anneau \mathcal{R}_X tel que la catégorie des \mathcal{R}_X -modules est équivalente à $\mathbf{QCoh}(X)$. Il semble donc possible d'injecter la géométrie algébrique classique dans le cadre des ultra-anneaux. La perspective à long terme est de pouvoir appliquer des invariants géométriques (homologie, cohomologie, K -théorie...) à l'étude des classes de complexité caractérisées à travers les ultra-anneaux. Pour cela, les travaux récents de Campbell et Zakharevich [CZ22] fourniront un point de départ intéressant.

Références bibliographiques.

- [Bra13] Martin Brandenburg: Rosenberg's Reconstruction Theorem (after Gabber). arXiv:1310.5978 [math.AG], 2013.
- [BSS89] Lenore Blum, Mike Shub, Steve Smale: On a theory of computation and complexity over the real numbers: completeness, recursive functions and universal machines. Bull. Amer. Math. Soc. 21:1–46, 1989.
- [CLW93] Aurelio Carboni, Stephen Lack, R.F.C. Walters: Introduction to extensive and distributive categories. J. Pure Appl. Algebra, 84(2):145–158, 1993.
- [CMR25] Baptiste Chanus, Damiano Mazza, Morgan Rogers: Unifying Boolean and Algebraic Descriptive Complexity. In *Proceedings of FSCD 2025*.
- [CZ22] Jonathan A. Campbell, Inna Zakharevich: Dévissage and localization for the Grothendieck spectrum of varieties. Adv. Math., 411, 2022.
- [Dur07] Nikolai Durov: New Approach to Arakelov Geometry. arXiv:0704.2030 [math.AG], 2007.
- [Imm99] Neil Immerman: Descriptive Complexity. Springer, 1999.
- [Joh02] Peter T. Johnstone: Sketches of an Elephant, vol. 2. Oxford Science Publications, 2002.