

Contrat doctoral – ED Galilée

Titre du sujet : Combinatoire, géométrie des invariants classiques et algèbres non associatives de tenseurs

- Unité de recherche : Laboratoire d'Informatique de Paris Nord (LIPN)
- Discipline : Informatique
- Direction de thèse : BENGELOUN, Joseph
- Contact : bengeloun@lipn.univ-paris13.fr
- Domaine de recherche : Combinatoire et interactions avec la physique
- Mots clés : Combinatoire, algèbres non associatives, tenseurs aléatoires, renormalisation.

Contexte/État de l'art – L'étude combinatoire des invariants des groupes classiques et leur encodage en termes de cartes aléatoires de dimension supérieure ou égale à 2 [Gur2016] ont profondément renouvelé les interactions entre combinatoire, théorie des représentations, géométrie énumérative [FLT18, BGR20, VB2022] et physique mathématique [Witten16]. En particulier, l'énumération des invariants orthogonaux et unitaires issus de traces de matrices et de tenseurs aléatoires a mis en évidence de nouvelles limites d'échelle associées à des géométries aléatoires discrètes [LM2021]. Malgré ces avancées majeures, la construction d'une théorie robuste des géométries aléatoires en dimension 3 ou plus demeure un défi fondamental. Un verrou conceptuel central réside dans le fait que ces approches reposent exclusivement sur des structures associatives, essentiellement matricielles. Ce projet propose de dépasser ce cadre en explorant systématiquement le rôle des algèbres non associatives, encore largement inexplorées dans ce contexte. Leur généralité, combinée à des avancées récentes décisives [SS24], en fait un candidat naturel pour ouvrir de nouvelles perspectives. L'ambition du projet est de développer un cadre conceptuel et combinatoire permettant de relier ces structures non associatives à des algèbres de tenseurs, mieux comprises et maîtrisées. Cette approche vise à construire de nouvelles classes d'invariants généralisant les invariants classiques, et à identifier les géométries aléatoires qu'ils sous-tendent. À terme, le projet a pour objectif de faire émerger de nouveaux univers de géométries aléatoires, d'en comprendre les propriétés combinatoires et asymptotiques, et d'en analyser les implications en théorie des représentations et en physique mathématique. En s'affranchissant du paradigme associatif, ce programme ouvre une voie radicalement nouvelle pour l'étude des structures aléatoires en dimension élevée.

Objectifs de la recherche – **Obj1** Étendre la transformée de Gracia-Bondía et Várilly [GBV88] aux algèbres de distributions et de fonctions non associatives, et construire l'algèbre de tenseurs non associative isomorphe correspondante. **Obj2** Mener l'étude combinatoire et l'énumération des nouveaux invariants issus des contractions de ces tenseurs dans ce cadre non associatif en usant la méthode générale [BGS26]. **Obj3** Analyser les modèles associés en grande dimension (limite large N) et caractériser les géométries aléatoires sous-jacentes.

Équipe d'accueil – Ce sujet, comme la liste de ses références laissent entrevoir, s'inscrit dans la thématique physique combinatoire de l'équipe CALIN du LIPN.

Références :

- [Gur16] R. Gurau, Random Tensors, Oxford University Press, 2016.
[FLT18] E. Fusy, L. Lionni, A. Tanasa, Combinatorial study of graphs arising from the Sachdev-Ye-Kitaev model, European Journal of Combinatorics, Volume 86, May 2020, 103066.
[BGR20] J. Ben Geloun and S. Ramgoolam, Quantum mechanics of bipartite ribbon graphs: Integrality, Lattices and Kronecker coefficients, Algebraic Combinatorics, Volume 6 (2023) no. 2, pp. 547-594.
[VB2022] V. Bonzom, Some structural and enumerative aspects of discrete surfaces and PL-manifolds, 2022 HDR thesis. <https://arxiv.org/abs/2212.12200>.
[LM2021] L. Lionni, J.-F. Marckert, Iterated foldings of discrete spaces and their limits: candidates for the role of Brownian map in higher dimensions, Math. Phys. Anal. Geom. 24 (2021) 4, 39.
[SS24] P. Schupp and R. J. Szabo, An algebraic formulation of nonassociative quantum mechanics, J. Phys. A 57 (2024), no. 23, 235302.
[GBV1988] J. M. Gracia-Bondía and J. C. Várilly, Algebras of distributions suitable for phase-space quantum mechanics. I, J. Math. Phys. 29 (1988), no. 4, 869-879.
[BGS26] J. Ben Geloun and A. Solente, Multiple-order tensor field theory: Enumeration of unitary invariant observables, J. Math. Phys. 67 (2026) 3, 033504.
[Witten19] E. Witten, An SYK-Like Model Without Disorder, J. Phys. A 52 (2019), no. 47, 474002.