DES NOUVEAUX HABITATS POUR LES OPÉRADES

SUPERVISEURS: MORGAN ROGERS ET GRÉGORY GINOT

1. Pré-requis

Pour ce projet de doctorat, le candidat doit impérativement avoir suivi au niveau M1/M2 les cours suivants:

Théorie des catégories

Cours d'algèbre commutative
ET/OU
Cours de logique (avec sémantique catégorique)

2. Contexte

Les *opérades* sont des structures formalisant les opérations algébriques. Par exemple, sur les nombres naturels nous pouvons additioner et multiplier les pairs de nombres. Il y a donc une opérade $\mathcal{O}$ qui rassemble tous les opération qu'on peut construire à partir de ces deux, tenant compte du nombre d'arguments (l'*arité*). Les expressions:

$$(x + y) \cdot z \quad \text{et} \quad x + (y \cdot z)$$

sont des opérations d'arité 3 dans cette opérade; on indique l'ensemble de toutes les opérations acceptant 3 arguments $\mathcal{O}_3$.

Quand les arguments et sorties des opérations peuvent avoir des *types* différents (ex. nombre naturels et nombres rationnels), nous parlons d'*opérades colorés* ou *multicatégories*. Enfin, quand nous voulons parler d'une structure muni d'une interprétation (cohérente) de chaque opération dans une opérade, on arrive aux *algèbres* de l'opérade. Les entiers naturels muni de l'addition et la multiplication sont bien un algèbre pour l'opérade $\mathcal{O}$ décrit ci-dessus, mais il y a aussi des algèbres plus exotiques (tout *semi-anneau* serait un algèbre pour cette opérade).

Une raison de s'intéresser au formalisme des opérades et que ceux-ci peuvent porter des structures supplémentaires en elle-mêmes qu'on peut étudier indépendamment du choix de la structure qui supporte les opérations. Par exemple, nous pouvons exprimer le fait que des opérations sur un espaces soient plus proches ou éloignées les un des autres grâce à une structure de métrique ou de topologie sur l'opérade correspondante. Ou bien nous pouvons donner sens aux situations où une opération peut être déformé en un autre grâce à une structure de catégorie. De tels variantes ont commencés à apparaître dans la littérature dans les derniers décennies, comprenant les opérades *topologiques*, *enrichis* et *supérieurs*, dont les derniers sont un sujet important dans le groupe Topologie Algébrique au LAGA, [2, 3].

3. Le projet

Dans un article récent, on a posé la question "qu'est-ce qu'un monoïde?" [1]. Ceci revenait à examiner pas la définition de monoïde (objet mathématique répandu) en elle-même, mais plutôt d'élargir le contexte catégorique dans lequel il est possible d'appliquer cette définition. On peut voir les monoïde comme un cas très particulier d'opérade, et les résultat se généralisent sans difficulté à celles-ci.

Ayant établit un contexte élargi où l'on peut parler d'opérade, on se trouve donc à demander à quel point les résultats concernant les opérades et leurs algèbres s'étendent. Est-ce qu'on peut y transporter les résultat homologique, ou caractériser des propriétés transversaux de catégories d'algèbres?

Avec une approche par logique catégorique, cela revient à identifier un fragment de logique qui est commune aux contextes différents: tout raisonnement porté par cette logique sera transversal. De l'autre coté, il faudra que le/la candidat.e étudie en profondeur les outils et résultats établis sur les algèbres d'opérade pour comprendre lesquels sont fortement dépendent de leur contexte établis et lesquels peuvent être appliqués transversalement.

D'intérêt particulier sera l'interaction entre les propriétés (équationnel, topologique etc.) d'une opérade seront reflétés dans leurs algèbres.

References

[1] Paul Blain Levy and Morgan Rogers. What is a monoid? *40th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, 2025.

[2] Eric Hoffbeck and Ieke Moerdijk. Homology of infinity-operads. *Annales de l'Institut Fourier*, 75, 2025.

[3] Jean-Louis Loday and Bruno Vallette. *Algebraic Operads*, volume 346 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 2012.